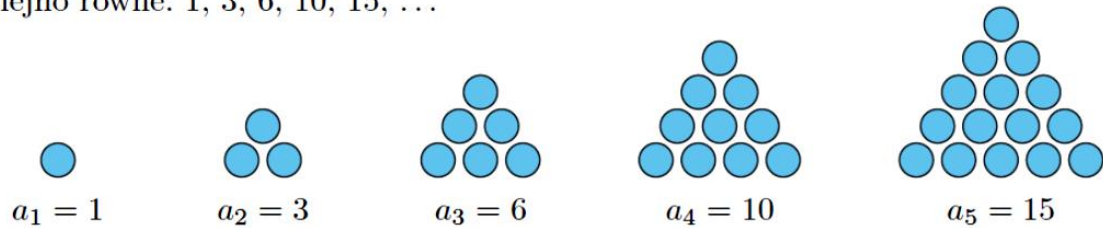


4.1. Pojęcie ciągu

Przypomnijmy, że liczby trójkątne (nazwę wyjaśnia poniższy rysunek) są kolejno równe: 1, 3, 6, 10, 15, ...



Mówimy, że liczby trójkątne tworzą **ciąg**. Ciąg jest określony, jeśli kolejnym liczbom naturalnym dodatnim przyporządkowano wartości: $a_1, a_2, a_3, \dots$, które nazywamy **wyrazami ciągu**.

Przykład 1

W ciągu: 1, 4, 9, 16, ... wyrazy są kwadratami kolejnych liczb naturalnych dodatnich. Na przykład wyraz $a_9 = 9^2 = 81$, $a_{10} = 10^2 = 100$. Ogólnie, n -ty wyraz ciągu ma postać: $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 1

Odgadnij regułę, według której mogły powstać wyrazy danego ciągu, i podaj wyraz a_9 oraz wyraz a_{10} tego ciągu.

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

c) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$

d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$

DEFINICJA

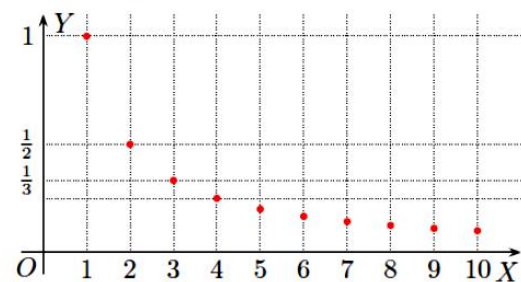
Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Uwaga. Zamiast „ciąg nieskończony” będziemy pisać krótko „ciąg”.

Kiedy mówimy o ciągach, używamy zwykle innych oznaczeń niż do opisu funkcji. I tak ciąg $a: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ oznaczamy (a_n) . Kolejne wartości funkcji a , czyli wyrazy ciągu: $a(1), a(2), a(3), \dots$, oznaczamy odpowiednio: $a_1, a_2, a_3, \dots$

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu odwrotności kolejnych liczb naturalnych dodatnich: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Ćwiczenie 1

a) $a_n = 2^n$

$a_9 = 512, a_{10} = 1024$

b) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_9 = \frac{1}{512}, a_{10} = \frac{1}{1024}$

c) $a_n = (-1)^n$

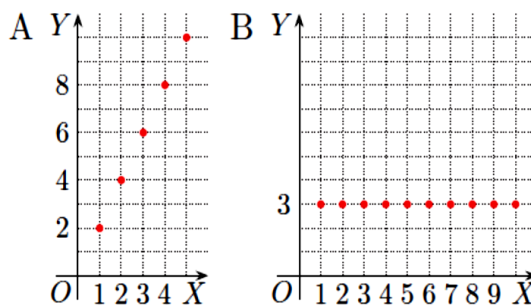
$a_9 = -1, a_{10} = 1$

d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$a_9 = \frac{1}{9}, a_{10} = -\frac{1}{10}$

Ćwiczenie 2

Na rysunku A przedstawiono wykres ciągu kolejnych liczb parzystych: 2, 4, 6, 8, 10, ..., a na rysunku B wykres ciągu stałego o wszystkich wyrazach równych 3. Podaj wyraz piętnasty oraz setny każdego z tych ciągów.



Ćwiczenie 2

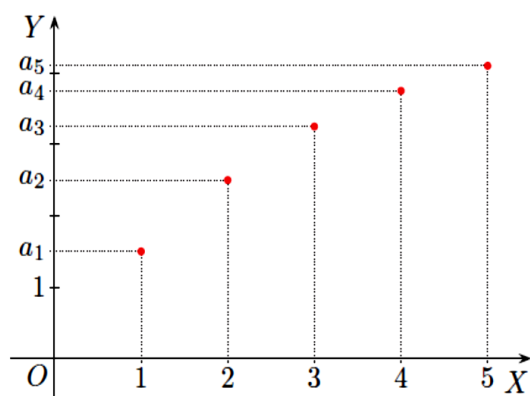
A: $a_n = 2n$, $a_{15} = 30$,
 $a_{100} = 200$

B: $a_n = 3$, $a_{15} = 3$, $a_{100} = 3$

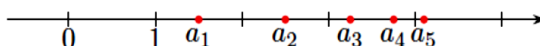
Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres ciągu:

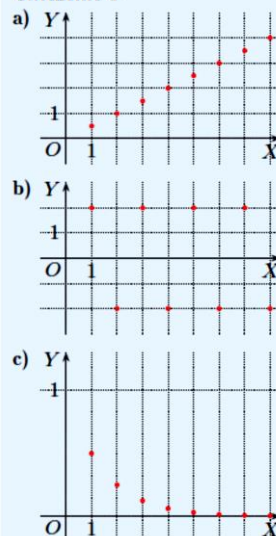
- o wyrazach: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
- naprzemiennego: 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...
- odwrotności kolejnych potęg liczby 2: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$



Czasami, zamiast rysować wykres ciągu w układzie współrzędnych (rysunek obok), wyrazy ciągu można zaznaczać na osi liczbowej (rysunek poniżej).



Ćwiczenie 3



4.2. Sposoby określania ciągu

Ciąg można opisać słownie, podając warunki, jakie spełniają jego wyrazy.

Przykład 1

a) Ciąg kolejnych cyfr występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

Jest to ciąg: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, ...

b) Ciąg kolejnych liczb pierwszych większych od 30.

Jest to ciąg: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...

Ćwiczenie 1

Wypisz siedem początkowych wyrazów ciągu:

a) kolejnych liczb naturalnych, których pierwiastek jest liczbą niewymierną,

b) kolejnych liczb pierwszych większych od 10.

Jednym ze sposobów określenia ciągu jest podanie wzoru na n -ty wyraz ciągu – wzór ten nazywamy **wzorem ogólnym ciągu**.

Przykład 2

a) Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu o wzorze ogólnym: $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, 3, 4, otrzymujemy:

$$a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

b) Oblicz dziesięć początkowych wyrazów ciągu o wzorze ogólnym: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Po podstawieniu za n kolejno liczb: 1, 2, ..., 10, otrzymujemy:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) oraz wyraz a_{10} .

$$\text{a) } a_n = \frac{n^2}{n+1} \quad \text{b) } a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad \text{c) } a_n = \frac{-3}{n(n+2)} \quad \text{d) } a_n = n^3 - n^2$$

Ćwiczenie 3

Oblicz następujące wyrazy ciągu (a_n) : a_1 , a_2 , a_3 , a_4 i a_{10} .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^n & \text{c) } a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \\ \text{b) } a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1} & \text{d) } a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \end{array}$$

Ćwiczenie 2

a) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{9}{4},$

$a_4 = \frac{16}{5}, a_{10} = \frac{100}{11}$

b) $a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{5}, a_3 = \frac{4}{5},$

$a_4 = \frac{15}{17}, a_{10} = \frac{99}{101}$

c) $a_1 = -1, a_2 = -\frac{3}{8},$

$a_3 = -\frac{1}{5}, a_4 = -\frac{1}{8},$

$a_{10} = -\frac{1}{40}$

d) $a_1 = 0, a_2 = 4, a_3 = 18,$

$a_4 = 48, a_{10} = 900$

Ćwiczenie 3

a) $a_1 = 2, a_2 = -4, a_3 = 8, a_4 = -16, a_{10} = -1024$

b) $a_1 = -4, a_2 = 8, a_3 = -16, a_4 = 32, a_{10} = 2048$

c) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{5}, a_{10} = \frac{9}{11}$

d) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{3}{5}, a_3 = \frac{5}{7}, a_4 = -\frac{7}{9}, a_{10} = -\frac{19}{21}$

Ćwiczenie 1

a) 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10

b) 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

Przykład 4

Które wyrazy ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = 25 - n^2$ są równe zero?

$$25 - n^2 = 0, \text{ gdy } n = -5 \text{ lub } n = 5$$

Z założenia $n \in \mathbb{N}_+$, zatem jedynym wyrazem ciągu (a_n) równym zero jest a_5 .

Ćwiczenie 6

Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero? Które wyrazy tego ciągu są dodatnie?

a) $a_n = 12 - 3n$ b) $a_n = 14 - 3n$ c) $a_n = n^2 - 4$ d) $a_n = 40 - n^2$

Ćwiczenie 6

a) $a_4 = 0, a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3\}$

b) Nie ma wyrazów równych zero.

$a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

c) $a_2 = 0, a_n > 0$ dla $n \geq 3$ i $n \in \mathbb{N}$

d) Nie ma wyrazów równych zero.

$a_n > 0$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ZADANIA

1. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = 4n - 2 & \text{d)} a_n = \frac{(-1)^n}{n} & \text{g)} a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \\ \text{b)} a_n = 3n - n^2 & \text{e)} a_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n} & \text{h)} a_n = \frac{n[1+(-1)^n]}{2} \\ \text{c)} a_n = 2^n - n & \text{f)} a_n = (-1)^{n+1} + n & \text{i)} a_n = n^2 + (-n)^{n-1} \end{array}$$

2. Dopasuj wzór ogólny ciągu do podanych kilku jego wyrazów początkowych.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}, \dots & \text{C. } \frac{2}{1}, \frac{4}{9}, \frac{6}{25}, \frac{8}{49}, \frac{10}{81}, \dots \\ \text{B. } 4, -4, 4, -4, 4, -4, 4, \dots & \text{D. } \frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \dots \end{array}$$

$$\text{I. } a_n = \frac{n+1}{n^2}$$

$$\text{III. } a_n = \frac{2n}{2n-1}$$

$$\text{II. } a_n = (-1)^{n+1} \cdot 4$$

$$\text{IV. } a_n = \frac{2n}{(2n-1)^2}$$

3. Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} & \text{c)} a_n = \begin{cases} 2n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \frac{n}{n-1} & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \\ \text{b)} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ 2^n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} & \text{d)} a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases} \end{array}$$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a_n = \frac{1}{2}n^2 - 18 & \text{d)} a_n = \frac{n^2-4n+3}{n+1} \\ \text{b)} a_n = \frac{n^2-4n}{n+1} & \text{e)} a_n = (n^2-49)(n^2-6n) \\ \text{c)} a_n = n^2 - 6n + 8 & \text{f)} a_n = \frac{n^3-4n^2+4n}{n^2+4} \end{array}$$

5. Które wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie?

$$\text{a)} a_n = -2n + 9 \quad \text{b)} a_n = 10 - n^2 \quad \text{c)} a_n = n^2 + 3n - 10$$

6. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} a_n = \frac{3}{2}n - 9 & \text{c)} a_n = n^2 - 12 & \text{e)} a_n = n^2 - 11n + 10 \\ \text{b)} a_n = -2n + 5 & \text{d)} a_n = n^2 - 5n & \text{f)} a_n = 3n^2 - 10n + 8 \end{array}$$

7. Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

$$\text{a)} a_n = 2n^2 - n + 9, \quad b_n = 6 - 8n \quad \text{b)} a_n = 4n^3, \quad b_n = 4n^2 - n$$

$$\text{7. a)} a_n = b_n, \text{ gdy } 2n^2 - n + 9 = 6 - 8n$$

$$2n^2 + 7n + 3 = 0$$

$$n = -3 \notin \mathbb{N}_+ \text{ lub } n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}_+$$

Zatem równanie $a_n = b_n$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbb{N}_+$, czyli wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

$$\text{b)} a_n = b_n, \text{ gdy } 4n^3 = 4n^2 - n$$

$$n(2n-1)^2 = 0$$

$$n = 0 \notin \mathbb{N}_+ \text{ lub } n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}_+$$

Zatem równanie $a_n = b_n$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbb{N}_+$, czyli wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych.

Odpowiedzi do zadań

- 2, 6, 10, 14, 18
 - 2, 2, 0, -4, -10
 - 1, 2, 5, 12, 27
 - $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$
 - $3, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{5}$
 - 2, 1, 4, 3, 6
 - $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{30}$
 - 0, 2, 0, 4, 0
 - 2, 2, 18, -48, 650
- A - III, B - II, C - IV, D - I
- $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}$
 - 0, 4, 0, 16, 0, 64
 - 2, 2, 6, $\frac{4}{3}$, 10, $\frac{6}{5}$
 - $\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 16, \frac{1}{7}, 36$
- a_6
 - a_4
 - a_2, a_4
 - a_1, a_3
 - a_6, a_7
 - a_2
- a_1, a_2, a_3, a_4
 - a_1, a_2, a_3
 - a_k dla $k \geq 3$
- a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
 - a_k dla $k \geq 3$
 - a_1, a_2, a_3
 - a_1, a_2, a_3, a_4
 - $a_2, \dots, a_9$
 - Nie ma takich wyrazów.

$$8. a) \begin{cases} 2a + b = 2 \\ 6a + b = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 3$$

$$\text{Stąd } a_n = -\frac{1}{2}n + 3.$$

b) Wykres ciągu zawiera się w prostej $y = -\frac{2}{3}x + b$, która jest wykresem funkcji malejącej. Zatem

$$a_1 = \frac{1}{3} \text{ oraz } \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + b, \text{ skąd } b = 1 \text{ i } a_n = -\frac{2}{3}n + 1.$$

c) Wykres ciągu zawiera się w prostej $y = -\frac{1}{3}x + b$ i $a_6 = 7$, więc $7 = -\frac{1}{3} \cdot 6 + b$. Zatem $a_n = -\frac{1}{3}n + 9$.

9. a) $a_n = 1 + \frac{4}{n} \in \mathbb{C}$, gdy n jest dzielnikiem liczby 4.

$$a_1 = 5, a_2 = 3, a_4 = 2$$

b) $a_n = \frac{36}{n^2} - 1 \in \mathbb{C}$, gdy n jest dzielnikiem liczby 6.

$$a_1 = 35, a_2 = 8, a_3 = 3, a_6 = 0$$

$$10. a) a_n = -(-2)^n$$

$$b) a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$c) a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2$$

$$d) a_n = \sqrt[n]{n+1}$$

$$e) a_n = \frac{3n-2}{5n+1}$$

$$f) a_n = \frac{1+(-1)^n}{2 \cdot 3^n}$$

8. Przeczytaj podany w ramce przykład.

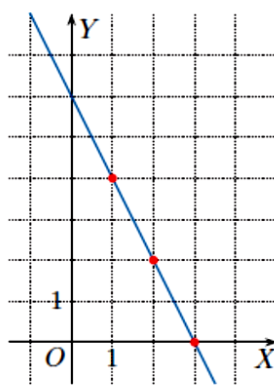
Przykład

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w wykresie funkcji liniowej przedstawionym na rysunku obok. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Punkty $(1, 4)$ i $(3, 0)$ należą do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$

i otrzymujemy $a = -2$ i $b = 6$. Zatem $y = -2x + 6$, czyli wzór ogólny ciągu ma postać $a_n = -2n + 6$.



Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej k . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

a) Prosta k przechodzi przez punkty $(2, 2)$ i $(6, 0)$.

b) Prosta k jest równoległa do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ oraz największy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$.

c) Prosta k jest prostopadła do prostej $y = 3x$ oraz $a_6 = 7$.

9. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) , które są liczbami całkowitymi.

$$a) a_n = \frac{n+4}{n}$$

$$b) a_n = \frac{36-n^2}{n^2}$$

10. Zaproponuj wzór ogólny ciągu.

$$a) 2, -4, 8, -16, 32, \dots$$

$$d) 2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \dots$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 11}, \dots$$

$$e) \frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots$$

$$c) 2, -2, 2, -2, 2, \dots$$

$$f) 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, \dots$$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) .

$$a) a_n = 7 - 2n$$

$$c) a_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

$$e) a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$$

$$b) a_n = n^2 - n$$

$$d) a_n = \frac{n-3}{n+3}$$

$$f) a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{3^n}$$

2. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

$$a) a_n = \frac{1}{4}n - \frac{1}{2}$$

$$c) a_n = n^2 - 8n + 15$$

$$e) a_n = \frac{27 - n^3}{n}$$

$$b) a_n = 2n + 8$$

$$d) a_n = n^2 + 2n - 8$$

$$f) a_n = \frac{(n^2 - 4)(9 - n^2)}{n + 6}$$

2. a) a_2

b) Nie ma takich wyrazów.

c) a_3, a_5

d) a_2

e) a_3

f) a_2, a_3

Powtórzenie

1. a) $a_1 = 5, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = -1$

b) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 12$

c) $a_1 = 2, a_2 = 2\frac{1}{2}, a_3 = 3\frac{1}{3}, a_4 = 4\frac{1}{4}$

d) $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{5}, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{7}$

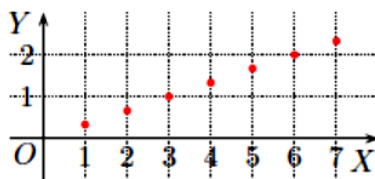
e) $a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = -\frac{1}{5}, a_4 = \frac{1}{6}$

f) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{1}{9}, a_3 = \frac{1}{27}, a_4 = -\frac{1}{81}$

4.3. Ciągi monotoniczne

Przykład 1

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n}{3}$ (wykres obok) to: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest większy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

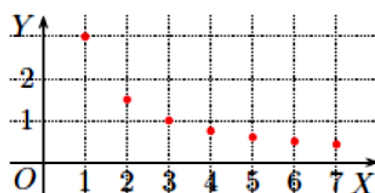


DEFINICJA

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami rosnącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n > 0$).

Przykład 2

Kolejne wyrazy ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{3}{n}$ (wykres obok) to: $\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$. Każdy wyraz tego ciągu (oprócz pierwszego) jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, zatem ciąg (a_n) jest malejący.



DEFINICJA

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami malejącym**, jeżeli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n < 0$).

Ćwiczenie 1

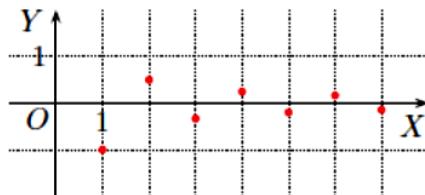
Podaj przykład ciągu:

- a) malejącego, o wszystkich wyrazach większych od 10,
- b) rosnącego, o wszystkich wyrazach ujemnych.

Przykład 3

Uzasadnij, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ (wykres obok) nie jest monotoniczny.

Kolejne wyrazy ciągu (a_n) to: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$. Aby stwierdzić, że ten ciąg nie jest monotoniczny, wystarczy zauważyć, że na przykład drugi wyraz jest większy od pierwszego ($a_2 > a_1$), natomiast trzeci wyraz jest mniejszy od drugiego ($a_3 < a_2$).



Ćwiczenie 1

Przykładowa odpowiedź:

- a) $a_n = 10 + \frac{1}{n}$
- b) $a_n = -\frac{1}{n}$

Ćwiczenie 2

a) $a_2 < a_3$, ale $a_3 > a_4$,
więc ten ciąg nie jest monotoniczny.

b) $a_1 > a_2$, ale $a_4 < a_5$,
więc ten ciąg nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 3

a) $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 0,$
 $a_4 = 1, a_5 = 4$

Nie jest monotoniczny.

b) $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 3,$
 $a_4 = 0, a_5 = -5$

Nie jest monotoniczny.

c) $a_1 = -1, a_2 = -5,$
 $a_3 = -7, a_4 = -7, a_5 = -5$

Nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 4

a) $a_{n+1} = 3n + 10$

b) $a_{n+1} = -6n - 2$

c) $a_{n+1} = n^2 + 2n$

d) $a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$

e) $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$

f) $a_{n+1} = \frac{-2n-2}{3n+1}$

g) $a_{n+1} = \frac{n-2}{n^2+2n+2}$

h) $a_{n+1} = \frac{n^2+2n}{2n-3}$

Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podany ciąg nie jest monotoniczny.

a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$

b) $-1, -1\frac{1}{2}, -2, -2\frac{1}{2}, -5, -3, -3\frac{1}{2}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Czy jest to ciąg monotoniczny?

a) $a_n = (n-3)^2$

b) $a_n = -n^2 + 4n$

c) $a_n = n^2 - 7n + 5$

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest monotoniczny, nie wystarczy obliczenie kilku jego początkowych wyrazów. Należy zbadać znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład 4

a) Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n}{n+3}$. Wyznacz wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \frac{2n+2}{n+4} \quad \text{wyraz } a_{n+1} \text{ otrzymujemy, wstawiając } n+1 \text{ w miejsce } n$$

b) Dany jest ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 - 5n$. Wyznacz wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 5(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 = n^2 - 3n - 4$$

Ćwiczenie 4

Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) .

a) $a_n = 3n + 7$

c) $a_n = n^2 - 1$

e) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

g) $a_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

b) $a_n = 4 - 6n$

d) $a_n = 2n^2 - n$

f) $a_n = \frac{-2n}{3n-2}$

h) $a_n = \frac{n^2-1}{2n-5}$

Przykład 5

Wykaż, że ciąg $a_n = n^2 + 4n$ jest rosnący.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)^2 + 4(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 = \\ &= n^2 + 6n + 5 \quad \text{wyznaczamy wyraz } a_{n+1} \end{aligned}$$

Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = (n^2 + 6n + 5) - (n^2 + 4n) = 2n + 5$$

Zauważmy, że $a_{n+1} - a_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Ćwiczenie 5

Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

a) $a_n = 2n - 10$

b) $a_n = \frac{1}{3}n + 2$

c) $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 6$

d) $a_n = n^2 - n$

Ćwiczenie 5

a) $a_{n+1} = 2n - 8,$

$a_{n+1} - a_n = 2 > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

b) $a_{n+1} = \frac{1}{3}n + 2\frac{1}{3},$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

c) $a_{n+1} = \frac{1}{2}n^2 + n - 5\frac{1}{2},$

$a_{n+1} - a_n = n + \frac{1}{2} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

d) $a_{n+1} = n^2 + n,$

$a_{n+1} - a_n = 2n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Ćwiczenie 6

Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

a) $a_n = -3n + 8$ b) $a_n = \frac{1}{2} - 4n$ c) $a_n = -4n^2 + 5$ d) $a_n = 2n - n^2$

Ciągami monotonicznymi, oprócz ciągów rosnących i ciągów malejących, są ciągi stałe, ciągi niemalejące i ciągi nierosnące.

DEFINICJA

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami niemalejącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \geq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \geq 0$).

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami nierosnącym**, jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $a_{n+1} \leq a_n$ (czyli $a_{n+1} - a_n \leq 0$).

Uwaga. Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.

Ćwiczenie 7

Jakie liczby można wstawić w miejsce $?$, aby otrzymać ciąg niemalejący?

a) 1, 2, 3, 4, $?$, $?$, 4, 5, 6, ... b) 1, $\frac{3}{2}$, $?$, 2, $?$, $?$, 3, 3, 3, ...

Ćwiczenie 8

Wypisz osiem początkowych wyrazów dowolnego nierosnącego ciągu (a_n) , dla którego:

a) $a_2 = a_3 = 2$, $a_5 = 1$, b) $a_4 = a_6 = -1$, $a_7 = -2$.

ZADANIA

1. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a) $a_n = n^2 - 1$ c) $a_n = \frac{3+n}{n}$ e) $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}$ g) $a_n = \frac{2n^2+3}{2n+6}$
b) $a_n = 2n - n^2$ d) $a_n = \frac{2n}{n+5}$ f) $a_n = \frac{2-3n}{4n-5}$ h) $a_n = \frac{4-2n^2}{2n^2-1}$

2. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = 5 - 2n$ d) $a_n = 1 - n^2$ g) $a_n = (n+3)^2$
b) $a_n = \frac{1}{6}n - 9$ e) $a_n = 3 - 2n^2$ h) $a_n = n(\frac{1}{2} - n)$
c) $a_n = 4n^2 - 9$ f) $a_n = n^2 - 2n$ i) $a_n = 4 - n^2 + 2n$

2. c) $a_{n+1} - a_n = 8n + 4 > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.
d) $a_{n+1} - a_n = -2n - 1 < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
e) $a_{n+1} - a_n = -4n - 2 < 0$ dla każdej $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
f) $a_{n+1} - a_n = 2n - 1 > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.
g) $a_n = (n+3)^2 < (n+4)^2 = a_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.
h) $a_{n+1} - a_n = -2n - \frac{1}{2} < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
i) $a_{n+1} - a_n = -2n + 1 < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 6

- a) $a_{n+1} = -3n + 5$,
 $a_{n+1} - a_n = -3 < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
b) $a_{n+1} = -4n - 3\frac{1}{2}$,
 $a_{n+1} - a_n = -4 < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
c) $a_{n+1} = -4n^2 - 8n + 1$,
 $a_{n+1} - a_n = -8n - 4 < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
d) $a_{n+1} = -n^2 + 1$,
 $a_{n+1} - a_n = 1 - 2n < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 7

- a) 4, 4
b) $a_3 \in \langle \frac{3}{2}; 2 \rangle$, $a_5 \in \langle 2; 3 \rangle$,
 $a_6 \in \langle 2; 3 \rangle$ i $a_5 \leq a_6$

Ćwiczenie 8

Przykładowa odpowiedź:

- a) 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1
b) 2, 2, 2, -1, -1, -1, -2, -2

Odpowiedzi do zadań

1. a) $n^2 + 2n$ b) $-n^2 + 1$
c) $\frac{n+4}{n+1}$ d) $\frac{2n+2}{n+6}$
e) $\frac{3n-1}{2n+3}$ f) $\frac{-3n-1}{4n-1}$
g) $\frac{2n^2+4n+5}{2n+8}$ h) $\frac{-2n^2-4n+2}{2n^2+4n+1}$
2. a) $a_{n+1} - a_n = -2 < 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym.
b) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{6} > 0$ dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

3. a) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}$;
 $a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$
 b) $5, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{3}, 3\frac{3}{4}, 4\frac{1}{5}$;
 $a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$
 c) $3, 2, 1, 0, 1$;
 $a_3 > a_4$, ale $a_4 < a_5$
 d) $3, 0, 5, 12, 21$;
 $a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$
 e) $0, -1, 0, 3, 8$;
 $a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$
 f) $7, 12, 15, 16, 15$;
 $a_3 < a_4$, ale $a_4 > a_5$

4. a) malejący b) stały
 c) rosnący

5. a) $k < 1$ b) $k > 1$ c) $k = 1$

6. a) $k > \frac{3}{2}$
 b) $k \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$
 c) $k \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

7. a) $a_{n+1} - a_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.
 b) $a_{n+1} - a_n = \frac{6}{(n+2)(n+3)} > 0$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest rosnący.
 c) $a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} < 0$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.
 d) $a_{n+1} - a_n = \frac{-5}{(4n+1)(4n+5)} < 0$
 dla $n \in \mathbb{N}_+$, zatem ciąg (a_n) jest malejący.

3. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ten ciąg nie jest monotoniczny.

a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

c) $a_n = |n - 4|$

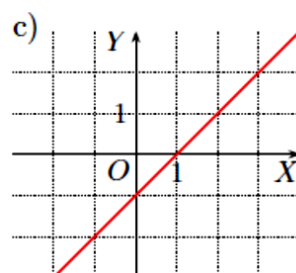
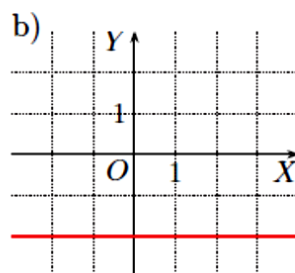
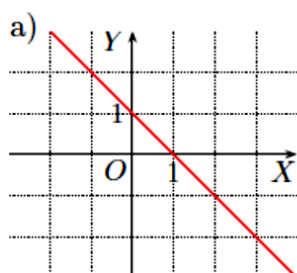
e) $a_n = (n - 1)(n - 3)$

b) $a_n = 4 - \frac{(-1)^n}{n}$

d) $a_n = |n^2 - 4|$

f) $a_n = 8n - n^2$

4. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej przedstawionej na rysunku. Określ monotoniczność tego ciągu.



5. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w prostej $y = (k - 1)x$. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący, c) stały?

6. Dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n) jest rosnący?

a) $a_n = (2k - 3)n - 6$

b) $a_n = (k^2 - 1)n + 4$

c) $a_n = (3 - k^2)n$

7. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+1}$

b) $a_n = \frac{3n}{n+2}$

c) $a_n = \frac{n}{2n-1}$

d) $a_n = \frac{3n+2}{4n+1}$

POWTÓRZENIE

1. Podaj przykład ciągu:

a) malejącego, o wszystkich wyrazach większych od 100,

b) rosnącego, o wszystkich wyrazach mniejszych od $\frac{1}{2}$.

2. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Uzasadnij, że ciąg ten nie jest monotoniczny.

a) $a_n = (2 - n)^2$

b) $a_n = n^2 - 6n$

c) $a_n = 1 + 5n - n^2$

3. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) .

a) $a_n = 3n + 4$

c) $a_n = n^2 - 4n$

e) $a_n = \frac{n-1}{n}$

b) $a_n = 2 - 5n$

d) $a_n = \frac{3n-3}{n+1}$

f) $a_n = \frac{2n-4}{3n+2}$

4. Określ monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $a_n = 4n - 2$

b) $a_n = -n + 7$

c) $a_n = n^2 - 8$

Powtórzenie

1. Przykładowa odpowiedź:

a) $101, 100\frac{1}{2}, 100\frac{1}{3}, 100\frac{1}{4}, \dots, a_n = 100 + \frac{1}{n}$

b) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \dots, a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

2. a) $1, 0, 1, 4, 9; a_1 > a_2$, ale $a_2 < a_3$

b) $-5, -8, -9, -8, -5; a_2 > a_3$, ale $a_3 < a_4$

c) $5, 7, 7, 3, 1; a_3 > a_1$, ale $a_3 < a_4$

3. a) $a_{n+1} = 3n + 7$

b) $a_{n+1} = -5n - 3$

c) $a_{n+1} = n^2 - 2n - 3$

d) $a_{n+1} = \frac{3n}{n+2}$

e) $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}$

f) $a_{n+1} = \frac{2n-2}{3n+5}$

4. a), c) ciąg rosnący

b) ciąg malejący

4.4. Ciąg arytmetyczny (1)

DEFINICJA

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciąg arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r ma postać:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając z powyższego wzoru, możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Przykład 3

Oblicz trzydziesty wyraz ciągu arytmetycznego: 1, 11, 21, 31, 41, ...

Jest to ciąg o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i różnicy $r = a_2 - a_1 = 11 - 1 = 10$, stąd $a_{30} = a_1 + 29 \cdot r = 1 + 29 \cdot 10 = 291$.

Ćwiczenie 3

- a) $a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$, $a_{20} = 40$
 b) $a_n = 4 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + 3\frac{1}{2}$, $a_{20} = 13\frac{1}{2}$
 c) $a_n = 3 + (n-1) \cdot (-1) = -n + 4$, $a_{20} = -16$

Ćwiczenie 3

Podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... b) $4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6, \dots$ c) 3, 2, 1, 0, -1, -2, ...

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:

rosnący, gdy $r > 0$; malejący, gdy $r < 0$; stały, gdy $r = 0$.

Ćwiczenie 4

- a) $r = -6$, malejący, $a_n = -6n + 15$
 b) $r = \frac{3}{4}$, rosnący, $a_n = \frac{3}{4}n + 1$
 c) $r = 0$, stały, $a_n = 2$

Ćwiczenie 4

Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego i określ jego monotoniczność. Wyznacz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

- a) 9, 3, -3, -9, -15, -21, ... b) $1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 4, \dots$ c) 2, 2, 2, 2, ...

Ćwiczenie 5

- a) $k = 5$
 b) $k = 12$
 c) $k = -1$ lub $k = 3$

Ćwiczenie 5

Dla jakiej wartości parametru k liczby: a_1, a_2, a_3 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) ?

- a) $a_1 = 3, a_2 = k + 1, a_3 = 3k - 6$
 b) $a_1 = 2k, a_2 = k + 3, a_3 = \frac{1}{2}k$ c) $a_1 = 1, a_2 = k^2, a_3 = k^2 + 2k + 2$

Liczby: a_1, a_2, a_3 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, gdy:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

Ćwiczenie 6

Dane są wyrazy: a_1, a_2, a_3 ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wyrazy a_4 i a_5 . Określ monotoniczność tego ciągu w zależności od parametru m .

- a) $a_1 = 4, a_2 = m + 6, a_3 = 2m + 8$ c) $a_1 = 1, a_2 = m^2, a_3 = 2m^2 - 1$
 b) $a_1 = \frac{1}{2}m, a_2 = m - 3, a_3 = \frac{3}{2}m - 6$ d) $a_1 = m^2, a_2 = m, a_3 = 2m - m^2$

Ćwiczenie 6

- a) $r = m + 2, a_4 = 3m + 10, a_5 = 4m + 12$,
 rosnący dla $m > -2$, malejący dla $m < -2$, stały dla $m = -2$
 b) $r = \frac{1}{2}m - 3, a_4 = 2m - 9, a_5 = \frac{5}{2}m - 12$,
 rosnący dla $m > 6$, malejący dla $m < 6$, stały dla $m = 6$
 c) $r = m^2 - 1, a_4 = 3m^2 - 2, a_5 = 4m^2 - 3$,
 rosnący dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, malejący dla $m \in (-1; 1)$, stały dla $m \in \{-1, 1\}$
 d) $r = m - m^2, a_4 = 3m - 2m^2, a_5 = 4m - 3m^2$,
 rosnący dla $m \in (0; 1)$, malejący dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$, stały dla $m \in \{0, 1\}$

Średnia arytmetyczna

Przykład 4

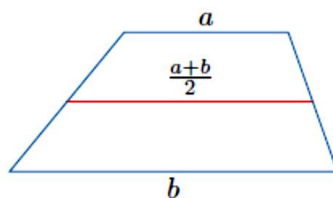
Wstaw między liczby a i b trzecią liczbę tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.

Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Wówczas:

$$x - a = b - x$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Szukaną liczbą jest więc **średnia arytmetyczna** liczb a i b . Otrzymujemy zatem ciąg: $a, \frac{a+b}{2}, b$.



Długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest średnią arytmetyczną długości jego podstaw.

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

Ćwiczenie 7

Wykaż powyższe twierdzenie.

Ćwiczenie 8

Oblicz x , jeśli podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

- a) 9, x , 37 b) 4, x , -8 c) $\frac{1}{2}$, x , $\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 7

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r = \\ &= a_1 + nr - r = \frac{2a_1 + 2nr - 2r}{2} = \\ &= \frac{a_1 + nr + a_1 + nr - 2r}{2} = \\ &= \frac{a_1 + nr + a_1 + (n-2)r}{2} = \\ &= \frac{a_1 + 1 + a_{n-1}}{2} \text{ dla } n \geq 2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 8

- a) $x = 23$ b) $x = -2$
c) $x = \frac{5}{12}$

ZADANIA

- Oblicz n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) . Określ monotoniczność tego ciągu.
a) $a_1 = -5, r = 3, n = 14$ c) $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}, n = 20$
b) $a_1 = 4, r = -4, n = 11$ d) $a_1 = -2, r = 0,1, n = 35$
- Oblicz różnicę i podaj wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = 6, a_3 = 20$ c) $a_1 = 9, a_6 = 6\frac{1}{2}$
b) $a_1 = -4, a_4 = 5$ d) $a_1 = 13, a_{10} = -23$
- Wyznacz liczby:
a) a, b tak, aby liczby: 1, $a, b, 10$ tworzyły ciąg arytmetyczny,
b) a, b, c tak, aby liczby: 2, $a, b, c, 100$ tworzyły ciąg arytmetyczny.
- Wstaw między liczby 1 i 25:
a) pięć liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny,
b) siedem liczb tak, aby otrzymać ciąg arytmetyczny.

4. a) 5, 9, 13, 17, 21
b) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22

6. a) $-5\frac{2}{3}, -7, -8\frac{1}{3}, -9\frac{2}{3}$
b) 2, 8, 11, 14
c) -1, -3, -5, -9
d) $-6\frac{1}{5}, -3\frac{1}{5}, -2, 1$

6. Oblicz brakujące wyrazy ciągu arytmetycznego.

- a) $-3, -4\frac{1}{3}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}$ c) $\boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, -7, \boxed{?}, -11$
b) $\boxed{?}, 5, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 17$ d) $\boxed{?}, -5, \boxed{?}, \boxed{?}, -\frac{1}{2}, \boxed{?}$

Odpowiedzi do zadań

- a) $a_{14} = 34$, ciąg rosnący
b) $a_{11} = -36$, ciąg malejący
c) $a_{20} = 10,5$, ciąg rosnący
d) $a_{35} = 1,4$, ciąg rosnący
- a) $r = 7, a_n = 7n - 1$
b) $r = 3, a_n = 3n - 7$
c) $r = -\frac{1}{2}, a_n = 9\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$
d) $r = -4, a_n = 17 - 4n$
- a) $r = 3, a = 4, b = 7$
b) I sposób
 $a_5 = a_1 + 4r$
 $100 = 2 + 4r$, czyli $r = 24,5$
Zatem:
 $a = 26,5$
 $b = 51$
 $c = 75,5$
II sposób
(ze średniej arytmetycznej)
 $b = \frac{2+100}{2} = 51$
 $a = \frac{2+51}{2} = 26,5$
 $c = \frac{51+100}{2} = 75,5$

7. a) $a_n = 44 - 4n$

b) $a_n = -10\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$

c) $a_n = 2\frac{3}{4} + \frac{1}{4}n$

d) $a_n = 7 - n$

7. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) $\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_{10} = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_5 = 4 \\ a_{21} = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_3 = -9 \\ a_{15} = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_3 = 4 \\ a_5 = 2 \end{cases}$

4.5. Ciąg arytmetyczny (2)

Przykład 1

Sprawdź, czy ciąg $a_n = n^2 + n + 1$ jest ciągiem arytmetycznym.

Obliczamy początkowe wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

Aby sprawdzić, czy ciąg jest arytmetyczny, należy zbadać, czy różnica między kolejnymi wyrazami tego ciągu jest stała.

Obliczamy różnice: $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$, $a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6$. Zatem $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, więc nie jest to ciąg arytmetyczny.

Przykład 2

Sprawdź, czy ciąg $a_n = (n - 2)^3 + 2$ jest ciągiem arytmetycznym.

Trzy początkowe wyrazy tego ciągu to: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, zatem: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1$. Nie jest to jednak ciąg arytmetyczny, gdyż $a_4 = 10$ i $a_4 - a_3 \neq a_3 - a_2$.

Ćwiczenie 1

Czy ciąg o podanych początkowych wyrazach jest arytmetyczny?

a) 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, ...

b) $1, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -3, -4\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, \dots$

Uwaga. Aby wykazać, że ciąg jest arytmetyczny, nie wystarczy sprawdzić różnicy między kilkoma początkowymi wyrazami tego ciągu.

Przykład 3

Oblicz trzy początkowe wyrazy ciągu $a_n = \frac{3n+2}{2}$. Wykaż, że jest to ciąg arytmetyczny.

Obliczamy trzy początkowe wyrazy ciągu: $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = \frac{8}{2}$, $a_3 = \frac{11}{2}$. Różnica między tymi wyrazami jest stała: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \frac{3}{2}$.

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny, należy sprawdzić, czy różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}_+$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+2}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3n+5}{2} - \frac{3n+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Zatem jest to ciąg arytmetyczny o różnicy $r = \frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 2

Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_n = 6n - 2$ b) $a_n = \frac{2n-5}{3}$ c) $a_n = \sqrt{2}n$ d) $a_n = 13 - \frac{1}{10}n$

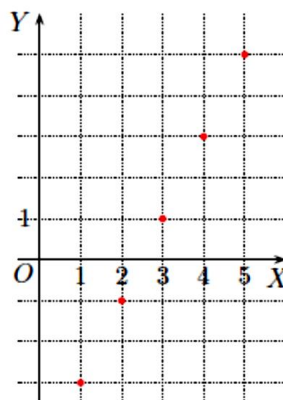
Przykład 4

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: $-3, -1, 1, 3, 5, \dots$ Naskicuj wykres tego ciągu i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.

Obliczamy różnicę ciągu: $r = -1 - (-3) = 2$. Wyznaczamy wzór ogólny:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r = -3 + (n-1) \cdot 2 = \\ &= 2n - 5 \end{aligned}$$

Wykres ciągu zawiera się więc w prostej $y = 2x - 5$.



Ćwiczenie 2

a) $a_{n+1} - a_n =$
 $= 6(n+1) - 2 - 6n + 2 = 6$
 dla dowolnej liczby $n \in N_+$,
 zatem ciąg jest arytmetyczny.

b) $a_{n+1} - a_n =$
 $= \frac{2(n+1)-5}{3} - \frac{2n-5}{3} = \frac{2}{3}$
 dla dowolnej liczby $n \in N_+$,
 zatem ciąg jest arytmetyczny.

c) $a_{n+1} - a_n =$
 $= \sqrt{2}(n+1) - \sqrt{2}n = \sqrt{2}$
 dla dowolnej liczby $n \in N_+$,
 zatem ciąg jest arytmetyczny.

d) $a_{n+1} - a_n =$
 $= 13 - \frac{1}{10}(n+1) - 13 + \frac{1}{10}n =$
 $= -\frac{1}{10}$
 dla dowolnej liczby $n \in N_+$,
 zatem ciąg jest arytmetyczny.

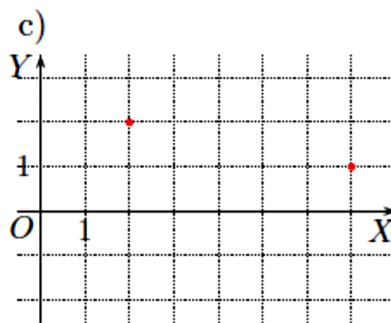
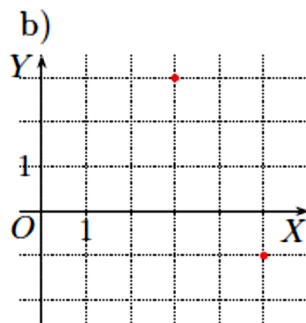
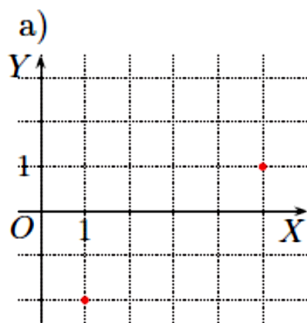
Ćwiczenie 3

a) Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego: $6, 4, 2, 0, -2, \dots$ Naskicuj wykres tego ciągu i podaj równanie prostej, w której się on zawiera.

b) Wykres ciągu arytmetycznego jest zawarty w prostej $y = 3x - 2$. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu oraz jego wzór ogólny.

ZADANIA

1. Na rysunku przedstawiono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od zera?



2. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wykres ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r . Znajdź punkt, w którym ta prosta przecina oś OX . Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 0?

a) $a_1 = 5, r = 2$ b) $a_6 = 8, r = -\frac{1}{3}$ c) $a_{10} = -4, r = 1$

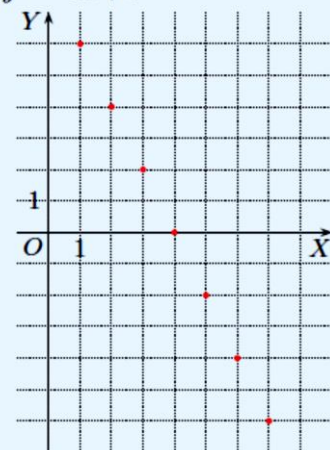
2. a) $y = 2x + 3, P(-\frac{3}{2}, 0)$. Nie ma takiego wyrazu.

b) $y = -\frac{1}{3}x + 10, P(30, 0), a_{30} = 0$

c) $y = x - 14, P(14, 0), a_{14} = 0$

Ćwiczenie 3

a) $r = -2, a_n = -2n + 8,$
 $y = -2x + 8$



b) $a_n = 3n - 2,$
 $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7,$
 $a_4 = 10, a_5 = 13$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $a_n = -2\frac{3}{4} + \frac{3}{4}n,$

$a_n > 0$ dla $n \geq 4$

b) $a_n = 9 - 2n,$

$a_n > 0$ dla $n \leq 4$

c) $a_n = 2\frac{2}{5} - \frac{1}{5}n,$

$a_n > 0$ dla $n \leq 11$

3. Dany jest ciąg $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n$.
- Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
 - Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.
4. Sprawdź, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
- $a_n = \frac{n+2}{6}$
 - $a_n = \frac{n-1}{n+1}$
 - $a_n = \frac{\sqrt{5}n+1}{2}$
 - $a_n = \frac{1}{2}(n-3)$
5. a) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Oblicz obwód tego trójkąta.
 b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych, jeżeli przeciwprostokątna ma długość 10.
6. a) Wykaż, że długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.
 b) Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli jego obwód jest równy 18.
7. a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Wykaż, że ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.
 b) Wykaż, że dla dowolnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ciąg (a_n) , określony za pomocą wzoru $a_n = f(n+1) - f(n)$, jest arytmetyczny.

b) 13,5

POWTÓRZENIE

1. Oblicz trzy początkowe wyrazy ciągu (a_n) . Sprawdź, czy jest to ciąg arytmetyczny.
- $a_n = 4n - 7$
 - $a_n = \frac{1}{2}n + 3$
 - $a_n = 1 - 2n$
 - $a_n = \frac{n+1}{3}$
 - $a_n = n^2 - 1$
 - $a_n = 8 - n^3$
 - $a_n = 3^{n-1}$
 - $a_n = 2^n - 2n$
2. Sprawdź, czy $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$. Oblicz a_4 i uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest arytmetyczny.
- $a_n = n^3 - 6n^2 + 11n$
 - $a_n = \sqrt[3]{n-2}$
 - $a_n = n^2 - 2^n$
3. a) Miary kątów trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Najmniejszy z tych kątów ma 40° . Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.
 b) Miary kątów czworokąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Największy z tych kątów ma 135° . Oblicz miary pozostałych kątów tego czworokąta.

Powtórzenie

- $a_1 = -3, a_2 = 1, a_3 = 5$, jest
 - $a_1 = 3\frac{1}{2}, a_2 = 4, a_3 = 4\frac{1}{2}$, jest
 - $a_1 = -1, a_2 = -3, a_3 = -5$, jest
 - $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = 1, a_3 = 1\frac{1}{3}$, jest
 - $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 8$, nie jest
 - $a_1 = 7, a_2 = 0, a_3 = -19$, nie jest
 - $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9$, nie jest
 - $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 2$, nie jest
- $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = 0, a_4 = 12, a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3 = 6$
 - $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = 1, a_4 = \sqrt[3]{2}, a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3 = \sqrt[3]{2} - 1$
 - $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = 1, a_4 = 0, a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3 = -1$
- $60^\circ, 80^\circ$
 - $45^\circ, 75^\circ, 105^\circ$

3. a) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5$

b) $a_6 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 = 126$
 $a_5 - a_4 = 1 \neq a_6 - a_5 = 121$, zatem ciąg nie jest arytmetyczny.

4. a), c), d) jest b) nie jest

5. a) 36 b) 6, 8

6. a) Niech $a, a+r, a+2r$ ($a > 0, r > 0$) – długości boków trójkąta.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$a^2 + (a+r)^2 = (a+2r)^2$$

Stąd długości boków trójkąta są równe $a = 3r, a+r = 4r, a+2r = 5r$.

Zatem trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach 3, 4, 5.

7. a) $a_n = f(n+1) - f(n) = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 - (n^2 - 2n + 3) = 2n - 1$
 $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - (2n - 1) = 2$ dla dowolnej liczby $n \in N_+$, zatem ciąg jest arytmetyczny.

b) $f(n) = an^2 + bn + c$
 $f(n+1) = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = an^2 + n(2a+b) + a+b+c$
 $a_n = f(n+1) - f(n) = 2an + a + b$
 $a_{n+1} = 2a(n+1) + a + b = 2an + 3a + b$
 $a_{n+1} - a_n = 2a$ dla dowolnej liczby $n \in N_+$, zatem ciąg jest arytmetyczny.

4.6. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) oznaczamy symbolem S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

TWIERDZENIE

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Przykład 2

Oblicz sumy S_5 i S_8 ciągu arytmetycznego: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

$$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \frac{2+10}{2} \cdot 5 = 30$$

$$S_8 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 = 72$$

Ćwiczenie 2

a) Oblicz wyraz a_6 , a następnie sumę S_6 ciągu arytmetycznego: 1, 4, 7, 10, ...

b) Oblicz wyraz a_{20} , a następnie sumę S_{20} ciągu arytmetycznego: $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ...

Ćwiczenie 2

a) $a_6 = 1 + 5 \cdot 3 = 16$, $S_6 = \frac{1+16}{2} \cdot 6 = 51$

b) $a_{20} = \frac{1}{2} + 19 \cdot \frac{1}{2} = 10$, $S_{20} = \frac{\frac{1}{2}+10}{2} \cdot 20 = 105$

TWIERDZENIE

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Ćwiczenie 3

Uzasadnij podany powyżej wzór.

Przykład 3

Oblicz sumę S_{21} ciągu arytmetycznego: 3, 8, 13, 18, ...

Pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 3$, a różnica $r = 5$, zatem:

$$S_{21} = \frac{2 \cdot 3 + (21-1) \cdot 5}{2} \cdot 21 = \frac{6+100}{2} \cdot 21 = 53 \cdot 21 = 1113$$

Ćwiczenie 4

a) Oblicz sumę S_{31} ciągu arytmetycznego: 3, 7, 11, ...

b) Oblicz sumę S_{13} ciągu arytmetycznego: -5, -8, -11, ...

Przykład 4

Wyznacz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego: $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$.

Podane składniki sumy tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$, pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i wyrazie $a_n = 3n - 2$. Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$:

$$S_n = \frac{1 + (3n-2)}{2} \cdot n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Ćwiczenie 3

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \\ &= \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \\ &= \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4

a) $S_{31} = \frac{2 \cdot 3 + 30 \cdot 4}{2} \cdot 31 = 1953$

b) $S_{13} = \frac{2 \cdot (-5) + 12 \cdot (-3)}{2} \cdot 13 = -299$

Ćwiczenie 7

- a) $a_1 = 7, a_n = 51, r = 4, n = 12, S_{12} = 348$
b) $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 100, r = \frac{1}{2}, n = 200, S_{200} = 10050$
c) $a_1 = -5, a_n = -31, r = -2, n = 14, S_{14} = -252$
d) $a_1 = -18, a_n = 18, r = 3, n = 13, S_{13} = 0$

Ćwiczenie 8

- a) $a_1 = 3, a_n = 98, r = 5, n = 20, S_{20} = 1010$
b) Szukana suma:
 $S = (4 + 10 + \dots + 94) + (5 + 11 + \dots + 95)$
 $a_1 = 4, a_n = 94, r = 6, n = 16$
 $b_1 = 5, b_n = 95, r = 6, n = 16$
 $S = \frac{(4+94) \cdot 16}{2} + \frac{(5+95) \cdot 16}{2} = (98 + 100) \cdot 8 = 1584$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $a_1 = 0, a_{10} = 18, S_{10} = 90$
b) $a_1 = -4, a_{10} = 5, S_{10} = 5$
c) $a_1 = 18, a_{10} = -36, S_{10} = -90$
2. a) $100 + 101 + 102 + \dots + 199 = \frac{100+199}{2} \cdot 100 = 14950$
b) $14 + 16 + 18 + \dots + 2012 = \frac{14+2012}{2} \cdot 1000 = 1013000$
c) $11 + 13 + 15 + \dots + 99 = \frac{11+99}{2} \cdot 45 = 2475$
3. a) $a_1 = 1, a_n = 96, r = 5, n = 20, S_{20} = 970$
b) $a_1 = 11, a_n = 79, r = 4, n = 18, S_{18} = 810$

Przykład 5

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 1, czyli sumę: $1 + 7 + 13 + 19 + \dots + 97$.

Zauważmy, że liczby: 1, 7, 13, 19, ..., 97 tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$, ostatnim wyrazie $a_n = 97$ i różnicy $r = 6$.

Liczbę wyrazów ciągu wyznaczamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n - 1)r$:

$$97 = 1 + (n - 1) \cdot 6$$

skąd otrzymujemy $n = 17$. Zatem:

$$S_{17} = \frac{1+97}{2} \cdot 17 = 49 \cdot 17 = 833$$

Ćwiczenie 7

Oblicz sumę, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

- a) $7 + 11 + 15 + \dots + 47 + 51$ c) $-5 - 7 - 9 - \dots - 29 - 31$
b) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + \dots + 99\frac{1}{2} + 100$ d) $-18 - 15 - 12 - \dots + 15 + 18$

Ćwiczenie 8

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, których:

- a) reszta z dzielenia przez 5 jest równa 3,
b) reszta z dzielenia przez 6 jest równa 4 lub 5.

ZADANIA

1. Oblicz wyrazy a_1 i a_{10} oraz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_4 = 6$ i $a_8 = 14$ b) $a_6 = 1$ i $a_8 = 3$ c) $a_2 = 12$ i $a_4 = 0$
2. a) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych n takich, że $100 \leq n < 200$.
b) Oblicz sumę wszystkich liczb parzystych zawartych między 13 a 2013.
c) Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych nieparzystych.
3. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, które:
a) są mniejsze od 100 i których reszta z dzielenia przez 5 jest równa 1,
b) są większe od 10, mniejsze od 80 i których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 3.
4. Oblicz sumę wszystkich liczb niepodzielnych przez 3, które są:
a) dwucyfrowe, b) trzycyfrowe.

4. a) Niech S – suma wszystkich liczb dwucyfrowych, T – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3, $S - T$ – szukana suma. Zatem:

$$S - T = \frac{(10+99) \cdot 90}{2} - \frac{(12+99) \cdot 30}{2} = 4905 - 1665 = 3240.$$

- b) Niech S – suma wszystkich liczb trzycyfrowych, T – suma liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3, $S - T$ – szukana suma. Zatem:

$$S - T = \frac{(100+999) \cdot 900}{2} - \frac{(102+999) \cdot 300}{2} = 494550 - 165150 = 329400.$$

5. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1001, które są podzielne przez: a) 2 lub 3, b) 4 lub 9.
6. Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać liczbę 546?
a) 6, 8, 10, ... b) -24, -22, -20, ...
7. Rozwiąż równanie.
a) $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + x = 190$
b) $(1 + x) + (2 + 3x) + (3 + 5x) + (4 + 7x) + \dots + (50 + 99x) = 275$

8. Z miasta A do miasta B, oddalonego od A o 140 km, wyjechał rowerzysta, który przez pierwszą godzinę przejechał 10 km, a przez każdą następną o 2 km więcej niż w ciągu godziny poprzedniej. Jednocześnie z miasta B w stronę miasta A wyjechał drugi rowerzysta, który przez pierwszą godzinę przejechał 12 km, a przez każdą następną o 1 km więcej niż w ciągu poprzedniej. Po jakim czasie rowerzyści się spotkali?

9. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .

a) $a_n = \frac{5 + 10 + 15 + \dots + 5n}{n + 3}$
b) $a_n = \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{n + 5}$

5. a) Niech S – suma liczb podzielnych przez 2 i mniejszych od 1001, T – suma liczb podzielnych przez 3 i mniejszych od 1001, U – suma liczb podzielnych przez 6 i mniejszych od 1001, $S + T - U$ – szukana suma. Zatem:
$$S + T - U = \frac{(2+1000) \cdot 500}{2} + \frac{(3+999) \cdot 333}{2} - \frac{(6+996) \cdot 166}{2} = 250\,500 + 166\,833 - 83\,166 = 334\,167$$

b) Niech S – suma liczb podzielnych przez 4 i mniejszych od 1001, T – suma liczb podzielnych przez 9 i mniejszych od 1001, U – suma liczb podzielnych przez 36 i mniejszych od 1001, $S + T - U$ – szukana suma. Zatem:
$$S + T - U = \frac{(4+1000) \cdot 250}{2} + \frac{(9+999) \cdot 111}{2} - \frac{(36+972) \cdot 27}{2} = 125\,500 + 55\,944 - 13\,608 = 167\,836$$

6. a) 21 b) 39

7. a) $x = 37$ b) $x = -0,4$

8. Niech n – liczba godzin, po upływie których rowerzyści się spotkali.
$$\frac{2 \cdot 10 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n + \frac{2 \cdot 12 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n = 140$$

 $n = 5$
Rowerzyści spotkali się po 5 godzinach.

POWTÓRZENIE

1. Oblicz sumę S_{10} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = 3$ i $a_2 = 5$ b) $a_1 = -4$ i $a_2 = 0$ c) $a_1 = 6$ i $a_4 = -3$
2. Oblicz sumę S_{20} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = 8$, $a_3 = 6$ b) $a_6 = 5\frac{1}{2}$, $a_{11} = 9$ c) $a_1 = -100$, $a_{16} = 50$
3. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez:
a) 6, b) 11.
4. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych niepodzielnych przez:
a) 2, b) 4.
5. Oblicz sumę obwodów dwunastu kwadratów, których boki są kolejno równe: 1, 2, 3, ..., 12.

9. a) $a_n = \frac{5 \cdot (1+2+3+\dots+n)}{n+3} = \frac{5n(1+n)}{2(n+3)}$, $a_{n+1} = \frac{5(n+1)(n+2)}{2(n+4)}$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{5(n+1)}{2} \left[\frac{n+2}{n+4} - \frac{n}{n+3} \right] = \frac{5(n+1)}{2} \cdot \frac{n+6}{(n+3)(n+4)} > 0$$

dla $n \in N_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.
b) $a_n = \frac{3 \cdot (1+2+\dots+n)}{n+5} = \frac{3n(1+n)}{2(n+5)}$, $a_{n+1} = \frac{3(n+1)(n+2)}{2(n+6)}$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)}{2} \left[\frac{n+2}{n+6} - \frac{n}{n+5} \right] = \frac{3(n+1)}{2} \cdot \frac{n+10}{(n+5)(n+6)} > 0$$

dla $n \in N_+$, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym.

Powtórzenie

1. a) 120 b) 140 c) -75
2. a) -30 b) 173 c) -100
3. a) 810 b) 495
4. a) 247 500 b) 371 250
5. 312

4.11. Zagadnienia uzupełniające

Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne – zadania

Odpowiedzi do zadań

1. Korzystamy z równości uzasadnionej w ćwiczeniu 1 ze str. 124.

$$\begin{aligned}1 + 2 + \dots + (n-2) + \\ + (n-1) &= [1 + 2 + \\ + \dots + (n-1) + n] - n &= \\ = \frac{(n+1)n}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2} &= \\ = \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

2. Niech A – suma wszystkich liczb dwucyfrowych,
 B – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6,
 C – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 4,
 D – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 i przez 4 (czyli przez 12),
 S – szukana suma.

$$A = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905$$

$$\begin{aligned}B &= 12 + 18 + \dots + 96 = \\ &= 6 \cdot (2 + 3 + \dots + 16) = \\ &= 6 \cdot \frac{2+16}{2} \cdot 15 = 810\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 12 + 16 + \dots + 96 = \\ &= 4 \cdot (3 + 4 + \dots + 24) = \\ &= 4 \cdot \frac{3+24}{2} \cdot 22 = 1188\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= 12 + 24 + \dots + 96 = \\ &= 12 \cdot (1 + 2 + \dots + 8) = \\ &= 12 \cdot \frac{1+8}{2} \cdot 8 = 432\end{aligned}$$

$$S = A - B - C + D = 3339$$

3. a) 10, 20 lub $-\frac{15}{2}, \frac{45}{4}$

b) 2, 8

4. Niech $a_1, a_1 + r, a_1 + 3r$ – szukane liczby, które tworzą ciąg geometryczny.

Zatem:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r + a_1 + 3r = 28 \\ (a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 3r) \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} 3a_1 + 4r = 28 \\ r^2 = a_1r \end{cases}$$

1° Jeśli $r = 0$, to $a_1 = 9\frac{1}{3}$.

2° Jeśli $r \neq 0$, to $r = a_1$

i $a_1 = 4$.

Zatem szukane liczby to:

$9\frac{1}{3}, 9\frac{1}{3}, 9\frac{1}{3}$ lub 4, 8, 16.

5. a) $S = 108$ lub $S = 36$

b) $S = -36$

1. Przeczytaj dowód wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r . Uzasadnij przejście z linijki przedostatniej do ostatniej.

Dowód

$$\begin{aligned}S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = \\ &= a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + \\ &\quad + (a_1 + (n-2)r) + (a_1 + (n-1)r) = \\ &= n \cdot a_1 + r(1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)) = \\ &= n \cdot a_1 + r \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1)r)}{2} n = \frac{a_1 + a_n}{2} n\end{aligned}$$

2. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych, które nie są podzielne ani przez 6, ani przez 4.

3. a) Wstaw między liczby 5 i 30 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg geometryczny, a ostatnie trzy – ciąg arytmetyczny.

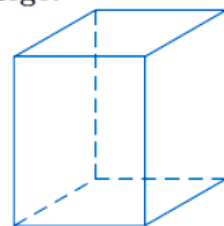
b) Wstaw między liczby -4 i 32 dwie takie liczby, aby pierwsze trzy tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy – ciąg geometryczny.

4. Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również kolejno wyrazami: pierwszym, drugim i czwartym ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

5. a) W dziewięciowyrazowym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy 4, wyrazy: pierwszy, trzeci i siódmy tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

b) W sześciowyrazowym malejącym ciągu arytmetycznym, którego pierwszy wyraz jest równy -1 , wyrazy: pierwszy, drugi i piąty tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu arytmetycznego.

6. Długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka tworzą ciąg geometryczny o sumie równej 14. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu, jeżeli jego objętość jest równa 64.



6. Niech a, aq, aq^2 – długości krawędzi prostopadłościanu, $a > 0$.

$$a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2) = 14$$

$$V = a \cdot aq \cdot aq^2 = a^3 q^3 = (aq)^3$$

$$64 = (aq)^3$$

$$aq = 4$$

$$P = 2(a \cdot aq + a \cdot aq^2 + aq \cdot aq^2) = 2aq \cdot a(1 + q + q^2) = 2 \cdot 4 \cdot 14 = 112$$

Wykres ciągu geometrycznego

Wykres ciągu geometrycznego:

$$q, q^2, q^3, \dots$$

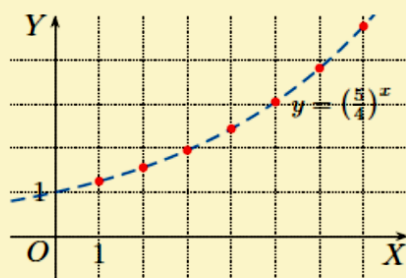
jest zawarty w wykresie funkcji $y = q^x$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres ciągu $a_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Ogólnie, wykres ciągu geometrycznego:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

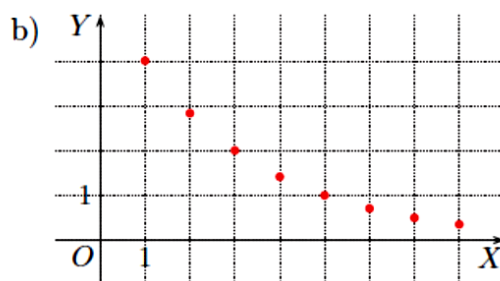
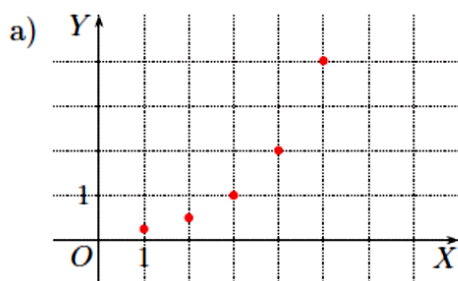
jest zawarty w wykresie funkcji $y = aq^{x-1}$.



7. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego, którego wykres jest zawarty w wykresie funkcji f .

a) $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$ b) $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ c) $f(x) = \frac{16}{4^x}$ d) $f(x) = 2^{x-5}$

8. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres ciągu geometrycznego (a_n) . Zapisz w postaci $f(x) = a \cdot q^{x-1}$ wzór funkcji, w której wykresie jest zawarty wykres tego ciągu.



7. a) $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 24$

b) $a_1 = 6, a_2 = 2, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{2}{9}$

c) $a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{16}$

d) $a_1 = \frac{1}{16}, a_2 = \frac{1}{8}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{2}$

8. a) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{x-1}$

b) $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x-1}$

Odpowiedzi do zadań

- a) -3 b) 3 c) 10 d) -6
- a) -4 b) -7
- $a_1 = 2, a_2 = 8, a_3 = 20, a_8 = 240$,
 $n(n+1)(n+2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych, zatem jeden z czynników jest liczbą podzieloną przez 3, czyli $a_n \in N_+$.
- a) $b_{n+1} - b_n = 1 > 0$
dla $n \in N_+$, zatem ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, rosnącym.
b) $b_{n+1} - b_n = 2n + 1 > 0$
dla $n \in N_+$, zatem ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym, ale jest rosnący.
c) $r = b_{n+1} - b_n = -2 < 0$
dla $n \in N_+$, zatem ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, malejącym.
d) $b_{n+1} - b_n = \frac{-3}{n(n+1)} < 0$
dla $n \in N_+$, zatem ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym, ale jest malejący.
e) $b_{n+1} - b_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$
dla $n \in N_+$, zatem ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym, ale jest malejący.
f) $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2} < 0$
dla $n \in N_+$, zatem ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, malejącym.
- a) $a_6 = 12, a_9 = 18$
b) $a_6 = -30, a_9 = -45$
c) $a_6 = 8, a_9 = 11$
d) $a_6 = -5, a_9 = -11$
e) $a_6 = 50, a_9 = 80$
f) $a_6 = \frac{11}{2}, a_9 = 4$
- a) $a_n = 2n - 2$
b) $a_n = 3n - 6$
c) $a_n = -2n + 10$

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

- Oblicz $a_{10} - b_8$.
a) $a_n = 2n + 1, b_n = 3n$ c) $a_n = \frac{n^2+5}{n}, b_n = \frac{5n-8}{n^2}$
b) $a_n = \frac{8-n}{4}, b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{2}$ d) $a_n = \sqrt[3]{2-n}, b_n = n^{\frac{2}{3}}$
- Oblicz $4a_2 - 6b_4$.
a) $a_n = \log_4 n, b_n = \log_5(2n - 3)$ b) $a_n = (-1)^{n^2-1}, b_n = (\sqrt{2})^{n-6}$
- Oblicz wyrazy: a_1, a_2, a_3 i a_8 ciągu o wzorze ogólnym $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
Uzasadnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.
- Sprawdź, czy ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym. Określ monotoniczność tego ciągu.
a) $b_n = n + 1$ c) $b_n = -2n + 3$ e) $b_n = \frac{1}{n}$
b) $b_n = n^2$ d) $b_n = \frac{n+3}{n}$ f) $b_n = 4 - \frac{1}{2}n$
- Oblicz wyrazy a_6 i a_9 ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .
a) $a_1 = 2, r = 2$ c) $a_1 = 3, r = 1$ e) $a_1 = 0, r = 10$
b) $a_1 = -5, r = -5$ d) $a_1 = 5, r = -2$ f) $a_1 = 8, r = -\frac{1}{2}$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_2 = 2, a_4 = 6$ b) $a_2 = 0, a_5 = 9$ c) $a_4 = 2, a_{10} = -10$
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $\begin{cases} a_1 + a_2 = 7 \\ a_1 \cdot a_2 = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_2 \cdot a_4 = 32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 6 \\ a_2 + a_4 = 8 \end{cases}$
- Oblicz sumę S_{12} ciągu arytmetycznego (a_n) .
a) $a_1 = 2, a_{10} = 29$ c) $a_1 = 4, a_9 = 28$ e) $a_2 = -8, r = 3$
b) $a_1 = 3, r = 2$ d) $a_2 = 5, a_{10} = 21$ f) $a_3 = 0, a_5 = -10$
- Kula tocząca się po równi pochyłej w pierwszej sekundzie przebyła drogę 0,5 m, a w każdej następnej sekundzie – drogę o 1 m dłuższą niż w poprzedniej. Oblicz drogę, którą przebyła kula w ciągu początkowych dziesięciu sekund.

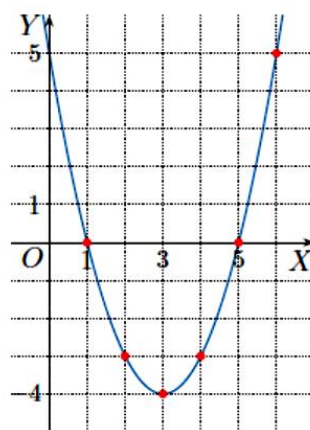
- a) $a_n = 3n - 1$ lub $a_n = -3n + 8$
b) $a_n = 2n - 12$ lub $a_n = 2n$
c) $a_n = n + 1$ lub $a_n = 5n - 11$
- a) 222 b) 168 c) 246 d) 168 e) 66 f) -210
- 50 m

10. Dla jakiej wartości x liczby: a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?
- a) $a = x - 2, b = \frac{x+1}{3}, c = 5x$ b) $a = -16, b = 3x, c = x^2$
11. Oblicz wyrazy od czwartego do ósmego ciągu geometrycznego (a_n) .
- a) $a_1 = 2, q = 1$ c) $a_1 = -2, q = -1$ e) $a_2 = -25, a_3 = 5$
b) $a_1 = 3, q = 2$ d) $a_1 = -4, q = \frac{1}{2}$ f) $a_3 = \frac{1}{3}, a_3 \cdot a_4 = 1$
12. Oblicz wyraz a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
- a) $a_1 = 2, a_4 = 250$ b) $a_1 = 64, a_6 = 2$
13. Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Określ jego monotoniczność.
- a) $b_n = 2^{-n}$ b) $b_n = 3 \cdot 5^n$ c) $b_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ d) $b_n = 2^{3n-1}$
14. Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) .
- a) $a_1 = 2, q = 2$ b) $a_2 = 2, q = -2$ c) $a_3 = 2, q = \frac{1}{2}$

10. a) $x = \frac{1}{2}$
b) $x = -2$ lub $x = 8$
11. a) 2, 2, 2, 2, 2
b) 24, 48, 96, 192, 384
c) 2, -2, 2, -2, 2
d) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$
e) $-1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}$
f) 3, 27, 243, 2187, 19683
12. a) 1250 b) 4
13. a), b), c), d) ciąg geometryczny
a), c) ciąg malejący
b), d) ciąg rosnący
14. a) 62 b) -11 c) 15,5

Zestaw II

1. a) Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) , jeżeli jego wykres jest zawarty w paraboli narysowanej obok.
b) Które wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $a_n \leq 12$?
2. Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli przechodzącej przez początek układu współrzędnych i mającej wierzchołek w punkcie $(2, 8)$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Oblicz wyrazy a_{10} i a_{20} .
3. Oblicz ósmy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) .
- a) $a_1 = 1, a_8 - a_7 = 2$ b) $a_2 = -10, a_5 = -40$ c) $a_7 + a_9 = 10$
4. Oblicz sumę S_{100} ciągu arytmetycznego (a_n) .
- a) $a_1 = \frac{1}{3}, a_{100} = \frac{2}{3}$ c) $a_1 = 5, a_{99} + a_{101} = 150$
b) $a_{10} = -1, a_{100} = -11$ d) $a_3 + a_6 = 4\frac{1}{2}, a_{10} - a_4 = 3$
5. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych, które są:
- a) podzielne przez 3, b) podzielne przez 6.



Zestaw II

1. a) $a_n = n^2 - 6n + 5$
b) $a_1, \dots, a_7$
2. $a_n = -2n^2 + 8n,$
 $a_{10} = -120, a_{20} = -640$
3. a) 15 b) -70 c) 5
4. a) 50 b) -550
c) 4000 d) 2525
5. a) 165 150 b) 82 350

6. a) Niech S – suma wszystkich liczb dwucyfrowych,
 T – suma liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5,
 $(S - T)$ – szukana suma.
 $S = 10 + 11 + \dots + 99 =$
 $= \frac{(10+99) \cdot 90}{2} = 4905$
 $T = 10 + 15 + 20 + \dots +$
 $+ 95 = 5(2 + 3 + \dots +$
 $+ 19) = 5 \cdot \frac{(2+19) \cdot 18}{2} = 945$
 $S - T = 4905 - 945 = 3960$

b) Niech S – suma wszystkich liczb trzycyfrowych,
 T – suma liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5,
 $(S - T)$ – szukana suma.
 $S = 100 + 101 + \dots + 999 =$
 $= \frac{(100+999) \cdot 900}{2} = 494550$
 $T = 100 + 105 + \dots + 995 =$
 $= 5 \cdot (20 + 21 + \dots + 199) =$
 $= 5 \cdot \frac{(20+199) \cdot 180}{2} = 98550$
 $S - T = 494550 - 98550 =$
 $= 396000$

7. a) $x = 13$ b) $x = -30$
c) $x = 37$ d) $x = 29$



8. a) $a_3 = \frac{1}{10}, a_5 = 10$
b) $a_3 = 8, a_5 = 32$

9. a) $x = -10$ lub $x = 5$
b) $x = 9$ lub $x = 21$



10. a) 33 b) 31

c) 521 lub 341
d) -44 lub -20



11. $a = \frac{x+y}{2}$ oraz $g = \sqrt{xy}$

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} &= \\ = \frac{x+y}{2} - \frac{2\sqrt{xy}}{2} &= \\ = \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{2} &= \\ = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} &\geq 0 \end{aligned}$$



dla dowolnych liczb dodatnich x i y .

Zatem

$$a = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = g.$$

6. Oblicz sumę wszystkich liczb niepodzielnych przez 5, które są:

a) dwucyfrowe, b) trzycyfrowe.

7. Lewa strona równania jest sumą kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

a) $3 + 5 + 7 + \dots + x = 48$ c) $2 + 7 + 12 + \dots + x = 156$
b) $8 + 6 + 4 + \dots + x = -220$ d) $-7 - 3 + 1 + \dots + x = 110$

8. Oblicz wyrazy a_3 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_6 = 100, q = 10$ b) $a_2 = 4, a_7 = 128$

9. Dla jakich wartości x liczby: a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

a) $a = x - 2, b = 6, c = x + 7$ b) $a = x - 5, b = x + 3, c = 36$

10. Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

a) $a_1 = 3, a_4 = -24$ c) $a_1 = 1, a_2 + a_3 = 20$
b) $a_2 = 8, a_7 = 0,25$ d) $a_1 = -4, S_3 = -12$

11. Niech a będzie średnią arytmetyczną dodatnich liczb x i y , a g – ich średnią geometryczną (tj. $g = \sqrt{xy}$). Uzasadnij, że prawdziwa jest nierówność $a \geq g$.

12. Jaką kwotę będziemy dysponowali po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 3000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?

a) $n = 2, r = 4,5\%$ b) $n = 4, r = 5\%$ c) $n = 6, r = 4\%$

13. Kapitał w wysokości 1500 zł został złożony w banku na pięć lat. Roczna stopa procentowa wynosi 4%. Czy dopisane odsetki przekroczą 330 zł, jeśli są one kapitalizowane: a) co rok, b) co pół roku, c) co kwartał?

14. Do banku wpłacono 2000 zł na dwa lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeżeli odsetki są kapitalizowane: a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc?

15. Kapitał w wysokości 800 zł został złożony w banku oferującym kapitalizację miesięczną. Oblicz wielkość kapitału po roku, jeśli przez sześć pierwszych miesięcy roczna stopa procentowa wynosiła:

a) 6%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 3%,
b) 3%, a przez sześć pozostałych miesięcy – 6%.

12. a) 3276,08 zł b) 3646,52 zł c) 3795,96 zł

13. a) nie b) nie c) tak

14. a) 2251,02 zł b) 2252,99 zł c) 2254,32 zł

15. a), b) 836,74 zł

Przed obowiązkową maturą z matematyki

Test

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

1. Liczba 6 jest piątym wyrazem ciągu:

A. $a_n = (n - 1)^2 + 5$,

C. $a_n = (n - 3)^2 + 5$,

B. $a_n = (n - 2)^2 + 5$,

D. $a_n = (n - 4)^2 + 5$.

2. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2n+6}{n}$. Żaden wyraz tego ciągu nie jest równy:

A. 8,

B. 6,

C. 5,

D. 3.

3. Ciągiem malejącym jest ciąg:

A. $a_n = n(2 - n)$,

C. $a_n = n(4 - n)$,

B. $a_n = n(3 - n)$,

D. $a_n = n(5 - n)$.

4. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 7(n - 1) + 4$. Jest to ciąg arytmetyczny o różnicy równej:

A. -4,

B. -3,

C. 4,

D. 7.

5. Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \sqrt{2} \cdot n - 1$. Suma S_5 tego ciągu jest równa:

A. $5\sqrt{2} - 1$,

B. $10\sqrt{2} - 1$,

C. $10\sqrt{2} - 5$,

D. $15\sqrt{2} - 5$.

6. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym $a_4 = 36$ i $q = 3$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

A. $\frac{4}{9}$,

B. $1\frac{1}{3}$,

C. 4,

D. 12.

7. Dany jest ciąg geometryczny $a_n = 54 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest liczbą należącą do przedziału:

A. $\langle -18; -16 \rangle$,

B. $\langle -16; -14 \rangle$,

C. $\langle -14; -12 \rangle$,

D. $\langle -12; -10 \rangle$.

8. Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 2. Suma wyrazów a_{11} i a_{21} tego ciągu jest równa:

A. 120,

B. 124,

C. 128,

D. 132.

9. Ciąg (a_n) jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1. Suma wyrazów ciągu (a_n) większych od 10 i mniejszych od 100 jest równa:

A. 1535,

B. 1540,

C. 1595,

D. 1760.

4.7. Ciąg geometryczny (1)

DEFINICJA

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciąg geometryczny**, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu.

Odpowiedzi do zadań

- a) $q = \frac{1}{2}$, $a_n = 2^{8-n}$, $a_7 = 2$
b) $q = 4$, $a_n = 4^{n-3}$, $a_7 = 256$
c) $q = -3$, $a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{3^5}$, $a_7 = 3$
d) $q = \frac{4}{5}$, $a_n = (\frac{4}{5})^{n-5}$, $a_7 = \frac{16}{25}$
e) $q = -\sqrt{2}$, $a_n = -(-\sqrt{2})^n$, $a_7 = 8\sqrt{2}$
f) $q = \frac{3}{2}$, $a_n = \frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}$, $a_7 = \frac{81}{32}$

Ćwiczenie 2

- $q = 2$, $a_4 = 24$, $a_5 = 48$
- $q = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 3$
- $q = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{4}$
- $q = \frac{1}{4}$, $a_4 = 1$, $a_5 = \frac{1}{4}$
- $q = -2$, $a_4 = -8$, $a_5 = 16$
- $q = -\frac{1}{3}$, $a_4 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 3

- $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 27$, $a_5 = 81$
- $a_2 = 8$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$
- $a_2 = -5$, $a_3 = 5$, $a_4 = -5$, $a_5 = 5$
- $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = -2$, $a_5 = 4$
- $a_2 = 1$, $a_3 = \sqrt{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = 2\sqrt{2}$
- $a_2 = 2\sqrt{3}$, $a_3 = 6\sqrt{2}$, $a_4 = 12\sqrt{3}$, $a_5 = 36\sqrt{2}$

Ćwiczenie 2

Podaj iloraz poniższego ciągu geometrycznego. Wypisz dwa następne jego wyrazy.

- 3, 6, 12, ...
- $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$
- 4, 2, 1, ...
- 64, 16, 4, ...
- 1, -2, 4, ...
- 27, 9, -3, ...

Ćwiczenie 3

Oblicz wyrazy: a_2 , a_3 , a_4 i a_5 ciągu geometrycznego (a_n) .

- $a_1 = 1$, $q = 3$
- $a_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$
- $a_1 = 5$, $q = -1$
- $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = -2$
- $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q = \sqrt{2}$
- $a_1 = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{6}$

TWIERDZENIE

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla każdego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Ćwiczenie 4

Dane są dwa kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz jego iloraz.

- 27 i 243
- $\frac{8}{9}$ i $\frac{4}{3}$
- 216 i -36
- $-\frac{6}{5}$ i $\frac{9}{10}$
- $\sqrt{2}$ i -4
- $2\sqrt{3}$ i $3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

- $q = 9$
- $q = \frac{3}{2}$
- $q = \frac{1}{6}$
- $q = -\frac{3}{4}$
- $q = -2\sqrt{2}$
- $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$

TWIERDZENIE

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ćwiczenie 6

Oblicz n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) .

- $a_1 = \frac{1}{8}$, $q = 2$, $n = 6$
- $a_1 = 25$, $q = \frac{1}{5}$, $n = 7$
- $a_1 = 8$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 4$
- $a_1 = \frac{1}{10}$, $q = 2\frac{1}{2}$, $n = 6$
- $a_1 = -2$, $q = -3$, $n = 5$
- $a_1 = -7$, $q = -1$, $n = 15$
- $a_1 = 5$, $q = \sqrt{2}$, $n = 9$
- $a_1 = \sqrt{3}$, $q = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $n = 8$

Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) .

- $a_4 = 1$, $q = \frac{1}{2}$
- $a_6 = 16$, $q = -2$
- $a_8 = 81$, $q = 3$

ZADANIA

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) o podanych wyrazach początkowych. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz a_7 .

- 128, 64, 32, ...
- $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, \dots$
- $\frac{1}{243}, -\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \dots$
- $\frac{625}{256}, \frac{125}{64}, \frac{25}{16}, \dots$
- $\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, \dots$
- $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

Ćwiczenie 6

- $a_6 = 4$
- $a_7 = \frac{1}{625}$
- $a_4 = \frac{64}{27}$
- $a_6 = \frac{625}{64}$
- $a_5 = -162$
- $a_{15} = -7$
- $a_9 = 80$
- $a_8 = -\frac{1}{27}$

Ćwiczenie 7

- $a_1 = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = 8$
- $a_1 = \frac{16}{(-2)^5} = -\frac{1}{2}$
- $a_1 = \frac{81}{3^7} = \frac{1}{27}$

2. a) $a_5 = -16, a_6 = 64,$
 $a_n = 4^{n-3} \cdot (-1)^n$
 b) $a_5 = 2, a_6 = -\frac{2}{3},$
 $a_n = 162 \cdot (-\frac{1}{3})^{n-1}$
 c) $a_5 = 4, a_6 = -4\sqrt{2},$
 $a_n = (-\sqrt{2})^{n-1}$
 d) $a_5 = -9\sqrt{3}, a_6 = 27,$
 $a_n = (-\sqrt{3})^n$
3. a) $a_1 = \frac{125}{96}, q = \frac{8}{25}$
 b) $a_1 = \frac{54}{25}, q = \frac{5}{6}$
 c) $a_1 = -\frac{7}{2}, q = -2$
 lub $a_1 = \frac{7}{2}, q = 2$
 d) $a_1 = -\frac{3}{4}, q = 2$
 e) $a_1 = -1024, q = -\frac{1}{2}$
 lub $a_1 = 1024, q = \frac{1}{2}$
 f) $a_1 = -\frac{1}{243}, q = -3$
 lub $a_1 = \frac{1}{243}, q = 3$
4. a) $-243, -81, -3, -1$
 b) $\frac{243}{625}, \frac{81}{125}, \frac{27}{25}, \frac{9}{5}$
 c) $3, 12, 24, 96$
 d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}$
 e) $\frac{1}{3}, -1, -9, 27$
 f) $2\sqrt{3}, 6, 6\sqrt{3}, 18\sqrt{3}$ lub
 $-2\sqrt{3}, 6, -6\sqrt{3}, -18\sqrt{3}$
5. a) $-4, -8, -16$
 lub $4, -8, 16$
 b) $12, 48, 192$
 lub $-12, 48, -192$
 c) $7, 7, 7$ lub $-7, 7, -7$

Powtórzenie

1. a) $q = 3, a_3 = 72,$
 $a_4 = 216, a_5 = 648$
 b) $q = -3, a_3 = 18,$
 $a_4 = -54, a_5 = 162$
 c) $q = \frac{4}{3}, a_3 = 1\frac{1}{3},$
 $a_4 = 1\frac{7}{9}, a_5 = 2\frac{10}{27}$
 d) $q = -6, a_3 = -12,$
 $a_4 = 72, a_5 = -432$
 e) $q = \frac{2}{3}, a_3 = -5\frac{1}{3},$
 $a_4 = -3\frac{5}{9}, a_5 = -2\frac{10}{27}$
 f) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_3 = 1,$
 $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_5 = \frac{1}{2}$

2. Oblicz wyrazy piąty i szósty podanego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.
 a) $-\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, -1, 4, \dots$ c) $1, -\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, \dots$
 b) $162, -54, 18, -6, \dots$ d) $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, 9, \dots$
3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przykład

Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) , jeżeli $a_4 = 6$ oraz $a_6 = 54$.

Jeżeli q jest ilorazem ciągu (a_n) , to $a_6 = a_4 \cdot q^2$, czyli $54 = 6q^2$.

Stąd $q^2 = 9$, czyli $q = -3$ lub $q = 3$.

Dla $q = -3$ mamy $a_1 = -\frac{2}{9}$ i kolejne wyrazy ciągu: $-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, -2, 6, -18, \dots$

Dla $q = 3$ mamy $a_1 = \frac{2}{9}$ i kolejne wyrazy ciągu: $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \dots$

Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) .

- a) $a_2 = \frac{5}{12}, a_3 = \frac{2}{15}$ c) $a_2 = 7, a_4 = 28$ e) $a_6 = 32, a_{10} = 2$
 b) $a_3 = 1\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{1}{4}$ d) $a_3 = -3, a_6 = -24$ f) $a_6 = 1, a_8 = 9$
4. Oblicz brakujące wyrazy ciągu geometrycznego.
 a) $?, ?, -27, -9, ?, ?$ d) $8, 2, ?, ?, ?, \frac{1}{512}$
 b) $?, ?, ?, ?, 3, 5$ e) $?, ?, 3, ?, ?, -81$
 c) $?, 6, ?, ?, 48, ?$ f) $?, ?, ?, 18, ?, 54$
5. Wstaw między liczby x i y trzy liczby tak, aby otrzymać ciąg geometryczny (podaj dwa rozwiązania).
 a) $x = -2, y = -32$ b) $x = 3, y = 768$ c) $x = 7, y = 7$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) oraz wyrazy: a_3, a_4 i a_5 .
 a) $a_1 = 8, a_2 = 24$ c) $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1$ e) $a_1 = -12, a_2 = -8$
 b) $a_1 = 2, a_2 = -6$ d) $a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = 2$ f) $a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2}$
2. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) .
 a) $a_1 = 15, a_4 = 5$ b) $a_1 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{2}$ c) $a_1 = -\frac{1}{10}, a_4 = 10$
3. Oblicz wyrazy a_2 i a_3 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
 a) $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2$ b) $a_1 = 64, q = -\frac{1}{2}$ c) $a_1 = -\frac{1}{256}, q = -4$

2. a) $a_2 = 5\sqrt[3]{9}, a_3 = 5\sqrt[3]{3}$ 3. a) $a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}$
 b) $a_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, a_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ b) $a_2 = -32, a_3 = 16$
 c) $a_2 = \sqrt[3]{\frac{100}{10}}, a_3 = -\sqrt[3]{10}$ c) $a_2 = \frac{1}{64}, a_3 = -\frac{1}{16}$

¶8. Ciąg geometryczny (5)

Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ jest:
rosnący, gdy $q > 1$; malejący, gdy $0 < q < 1$; stały, gdy $q = 1$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz monotoniczny ciąg geometryczny (a_n) , jeżeli:

- a) $a_3 = 2, a_5 = 4,5$, b) $a_2 = -4, a_6 = -64$.

Ćwiczenie 2

a) $q = \frac{3}{2}, a_1 = \frac{8}{9}, a_n = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

b) $q = 2, a_1 = -2, a_n = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

Ćwiczenie 3

a) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{5} = \frac{1}{2}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Ciąg jest malejący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q \in (0; 1)$.

b) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(-\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{7}\right)^n} = -\frac{1}{7}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = -\frac{1}{7}$. Ciąg nie jest monotoniczny, ponieważ $q < 0$.

c) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}}{-\frac{1}{3} \cdot 2^n} = 2$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = 2$. Ciąg jest malejący, ponieważ $a_1 < 0$ i $q > 1$.

d) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{-2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{3}$. Ciąg jest rosnący, ponieważ $a_1 < 0$ i $q \in (0; 1)$.

e) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6 \cdot (\sqrt{2})^n}{6 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}} = \sqrt{2}$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = \sqrt{2}$. Ciąg jest rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q > 1$.

f) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{2n+3}}{4^{2n+1}} = 16$

Jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = 16$. Ciąg jest rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q > 1$.

Przykład 2

Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Aby wykazać, że ciąg (a_n) jest geometryczny, należy sprawdzić, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla $n \in \mathbb{N}_+$.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 4^{n+1}}{3 \cdot 4^n} = 4$$

Zatem jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = 4$. Jest to ciąg rosnący, ponieważ $a_1 > 0$ i $q > 1$.

Ćwiczenie 3

Wykaż, że ciąg (a_n) jest geometryczny. Określ monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = \frac{5}{2^n}$

c) $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 2^n$

e) $a_n = 6(\sqrt{2})^{n-1}$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n$

d) $a_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

f) $a_n = 4^{2n+1}$

Ćwiczenie 4

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

Liczby: a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

Oblicz x , jeśli podane liczby tworzą ciąg geometryczny.

a) 1, x , 100

b) 2, x , 18

c) 36, x , $\frac{1}{9}$

d) $x, x, \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$

Ćwiczenie 4

Liczby: a, b, c , różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, czyli $b^2 = a \cdot c$.

Ćwiczenie 5

a) $x = -10$ lub $x = 10$

b) $x = -6$ lub $x = 6$

c) $x = -2$ lub $x = 2$

d) $x = -1$ lub $x = 1$

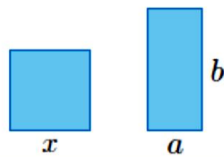
TWIERDZENIE

W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Ćwiczenie 6

Co można powiedzieć o polu kwadratu i polu prostokąta, jeśli x jest średnią geometryczną liczb a i b ?



Ćwiczenie 6

$x = \sqrt{ab}$, więc $x^2 = ab$

Zatem pola obu figur są równe.

ZADANIA

- Czy ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ i ilorazie q jest monotoniczny?
a) $q = \frac{143}{144}$ b) $q = -0,001$ c) $q = \frac{\pi}{3,14}$ d) $q = 0,9$ e) $q = 1 - \sqrt{2}$
- Wyznacz wzór ogólny monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $\begin{cases} a_6 = -4 \\ a_{10} = -\frac{1}{64} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 1 \\ a_2^2 = 25a_3^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 1 \\ a_2^2 + a_3^2 = 5 \end{cases}$
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przykład

Uzasadnij, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 - n + 2$ nie jest geometryczny.

Wypisujemy kolejne wyrazy ciągu: 2, 4, 8, 14, ... Badamy ilorazy:

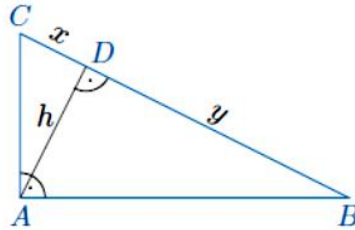
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{14}{8} \neq 2$$

Zatem ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

Uzasadnij, że ciąg (a_n) nie jest geometryczny.

a) $a_n = n^2 - 2n + 2$ b) $a_n = -n^2 + 4n - 2$

- Liczby: x, y, z tworzą monotoniczny ciąg geometryczny. Podwojona suma pierwszej i drugiej liczby jest równa sumie drugiej i trzeciej liczby, a suma tych trzech liczb jest równa 77. Wyznacz te liczby.
- Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie dzieli ona przeciwprostokątną.



POWTÓRZENIE

- Określ monotoniczność ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .
a) $a_1 = \frac{1}{15}, q = \frac{6}{5}$ c) $a_1 = -6, q = \frac{2}{3}$ e) $a_1 = -\frac{1}{6}, q = -9$
b) $a_1 = 10, q = 0,49$ d) $a_1 = -4, q = \sqrt{2}$ f) $a_1 = -3, q = \sqrt[3]{-1}$
- Wyznacz x i y tak, aby podane liczby były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Określ monotoniczność tego ciągu.
a) 2, x , 32, y b) 1, x , 2, y c) 18, x , 8, y d) $x, \frac{1}{10}, y, 10$

Powtórzenie

- a), c) rosnący b), d) malejący e), f) nie jest monotoniczny
- a) $x = 8, y = 128$, rosnący lub $x = -8, y = -128$, nie jest monotoniczny
b) $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$, rosnący lub $x = -\sqrt{2}, y = -2\sqrt{2}$, nie jest monotoniczny
c) $x = 12, y = 5\frac{1}{3}$, malejący lub $x = -12, y = -5\frac{1}{3}$, nie jest monotoniczny
d) $x = \frac{1}{100}, y = 1$, rosnący lub $x = -\frac{1}{100}, y = -1$, nie jest monotoniczny

Odpowiedzi do zadań

- a) malejący
b) nie jest monotoniczny
c) rosnący d) stały
e) nie jest monotoniczny
- a) $a_n = -4^{7-n}$
b) $a_n = 5^{3-n}$ lub $a_n = -5^{3-n}$
c) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ lub $a_n = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- a) Kolejne wyrazy ciągu: 1, 2, 5, ...
 $\frac{a_2}{a_1} = 2$, ale $\frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{2} \neq 2$
Zatem ciąg nie jest geometryczny.
b) Kolejne wyrazy ciągu: 1, 2, 1, ...
 $\frac{a_2}{a_1} = 2$, ale $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2} \neq 2$
Zatem ciąg nie jest geometryczny.
- Niech q – iloraz ciągu geometrycznego.
 $q > 0, x > 0, y = xq,$
 $z = xq^2$
$$\begin{cases} 2(x+y) = y+z \\ x+y+z = 77 \end{cases}$$

Po podstawieniu otrzymujemy:
$$\begin{cases} 2x + xq - xq^2 = 0 \\ x + xq + xq^2 = 77 \end{cases}$$

 $x(2+q-q^2) = 0$, gdy $-q^2+q+2=0$, czyli $q=2$.
Wtedy $x+xq+xq^2 = x+2x+4x = 7x$ i $7x = 77$.
Zatem $x = 11, y = 22, z = 44$.
- Zauważmy, że trójkąty CAD i ABD są podobne z cechy KKK, zatem:
 $\frac{|CD|}{|DA|} = \frac{|AD|}{|DB|}$, czyli $\frac{x}{h} = \frac{h}{y}$.
Stąd $h^2 = xy$, zatem $h = \sqrt{xy}$.

4.9. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

TWIERDZENIE

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$ wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Ćwiczenie 1

$$S_n = a_1 + a_1 + \dots + a_1 = a_1 n$$

Ćwiczenie 2

- a) $S_6 = 2 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} = 126$
b) $S_6 = 1 \cdot \frac{1-(-2)^6}{1-(-2)} = -21$
c) $S_6 = 1 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$

Ćwiczenie 1

Zapisz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q = 1$.

Ćwiczenie 2

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, korzystając z podanego wzoru. Sprawdź otrzymany wynik, dodając wyrazy ciągu.

- a) 2, 4, 8, 16, ... b) 1, -2, 4, -8, ... c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Ćwiczenie 3

Oblicz sumę S_{10} ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{32}$ oraz $a_2 = \frac{1}{16}$.

Ćwiczenie 3

$$q = 2$$

$$S_{10} = \frac{1023}{32} = 31\frac{31}{32}$$

Ćwiczenie 4

- a) Oblicz sumę S_7 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = -2$.
b) Oblicz sumę S_5 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = -4$ oraz $q = 3$.

Ćwiczenie 5

- a) Oblicz sumy S_8 i S_9 ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 2$ oraz $q = -1$.
b) Sformułuj wniosek dotyczący sumy n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie $q = -1$.

Przykład 2

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 4 i ilorazie 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać 1456?

Niech n będzie szukaną liczbą wyrazów. Wówczas:

$$4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = 1456$$

$$1 - 3^n = -728$$

$$3^n = 729$$

$$n = 6$$

Należy zsumować sześć początkowych wyrazów tego ciągu.

Ćwiczenie 6

- a) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać 635?
b) Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie $\frac{3}{2}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać $16\frac{1}{4}$?

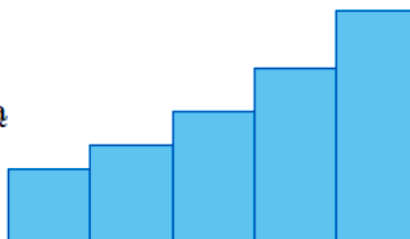
Ćwiczenie 7

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

- a) $q = 2$, $S_4 = 60$, b) $q = \frac{1}{2}$, $S_4 = 2046$, c) $q = 1$, $S_4 = 480$.

Ćwiczenie 8

Pola pięciu prostokątów (rysunek obok) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{4}{3}$. Suma tych pól jest równa $\frac{781}{90}$ cm². Oblicz pole najmniejszego prostokąta.



Ćwiczenie 8

Niech a_1 – pole najmniejszego prostokąta.

$$a_1 \cdot \frac{1 - (\frac{4}{3})^5}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{781}{90}$$

$$a_1 = 0,9 \text{ cm}^2$$

Ćwiczenie 4

- a) $S_7 = 129$
b) $S_5 = -484$

Ćwiczenie 5

- a) $S_8 = 0$
 $S_9 = 2$
b)
$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ a_1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Ćwiczenie 6

- a) $5 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 635$
 $2^n = 128$
 $n = 7$
b) $2 \cdot \frac{1 - (\frac{3}{2})^n}{1 - \frac{3}{2}} = 16\frac{1}{4}$
 $(\frac{3}{2})^n = \frac{81}{16}$
 $n = 4$

Ćwiczenie 7

- a) $a_1 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 60$
 $a_1 = 4$
b) $a_1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^4}{1 - \frac{1}{2}} = 2046$
 $a_1 = 1091,2$
c) $4a_1 = 480$
 $a_1 = 120$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $15\frac{15}{16}$ b) $26\frac{242}{243}$
c) -1275 d) -56

2. a) 6 b) 9 c) 10

4. a) $S_5 = \frac{1-0,8^5}{1-0,8}V =$
 $= \frac{2101}{625}V > \frac{1875}{625}V = 3V$
b) $S_n = \frac{64}{175}S_n \cdot \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-(\frac{3}{4})}$
 $n = 4$

5. A: $36 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}} = 70\frac{7}{8}$
B: $27 \cdot \frac{1-(\frac{2}{3})^6}{1-\frac{2}{3}} = 73\frac{8}{9}$
Balon B znajdował się wyżej.

ZADANIA

1. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli jego wyrazy pierwszy i drugi są odpowiednio równe:
a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}$, b) 18, 6, c) 15, -30 , d) $-7, -7$.
2. Ile początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie 2 należy zsumować, aby otrzymać:
a) 315, b) 2555, c) 5115?
3. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę, jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	5	162	242
-32	$\frac{1}{2}$	7	$-\frac{1}{2}$	$-63\frac{1}{2}$
1	2	10	512	1023
$\frac{1}{25}$	-5 lub 5	7	625	520,84 lub 781,24
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{2}$	8	-32	$-60 + 30\sqrt{2}$

4. a) Piramidę zbudowano w taki sposób, że najniższa warstwa bloków skalnych ma objętość V , a objętość każdej następnej warstwy stanowi 80% objętości warstwy leżącej bezpośrednio pod nią. Piramida ta składa się z 5 warstw. Czy objętość piramidy jest większa od $3V$?
b) Każda kolejna warstwa bloków skalnych, z których zbudowano piramidę, ma objętość o 25% mniejszą od objętości warstwy poprzedniej. Oblicz, z ilu warstw składa się piramida, jeśli objętość jej pierwszej warstwy jest równa $\frac{64}{175}$ objętości całej piramidy.
5. Balon A wzniósł się w pierwszej minucie lotu na wysokość 36 m. W każdej następnej minucie wznosił się dwa razy wolniej niż w minucie poprzedniej. Balon B wzniósł się w pierwszej minucie na wysokość 27 m, a w każdej następnej minucie wznosił się o $\frac{1}{3}$ wolniej niż w minucie poprzedniej. Który z balonów znajdował się wyżej po sześciu minutach wznoszenia?

1. Oblicz sumę S_5 podanego ciągu geometrycznego.

- a) 2, 8, 32, ... c) $-10, -5, -2\frac{1}{2}, \dots$ e) 3, $-6, 12, \dots$
 b) 8, 4, 2, ... d) $-2, -6, -18, \dots$ f) $-16, 8, -4, \dots$

2. Oblicz sumy S_6 i S_7 ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q .

- a) $a_1 = 1, q = -2$ b) $a_1 = 7, q = -1$ c) $a_1 = 81, q = -\frac{1}{3}$

3. Kartki pocztowe ułożono w stosy. W pierwszym stosie ułożono 4 kartki, a w każdym następnym dwukrotnie więcej kartek niż w poprzednim. Ile kartek było w największym stosie, jeżeli łącznie ułożono:

- a) 60 kartek, b) 1020 kartek, c) 4092 kartki?

4. Pierwszy odcinek łamanej ma długość 64 cm, a każdy następny jest 2 razy krótszy od poprzedniego. Z ilu odcinków składa się ta łamana, jeśli ma ona długość: a) 124 cm, b) 127,5 cm, c) 127,875 cm?

4. Niech n – liczba odcinków łamanej, S_n – długość łamanej.

$$S_n = 64 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 128 (1 - (\frac{1}{2})^n)$$

a) $128 (1 - (\frac{1}{2})^n) = 124$

$$(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{32}, n = 5$$

b) $128 (1 - (\frac{1}{2})^n) = 127,5$

$$(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{256}, n = 8$$

c) $128 (1 - (\frac{1}{2})^n) = 127,875$

$$(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1024}, n = 10$$

Powtórzenie

1. a) 682 b) $15\frac{1}{2}$

c) $-19\frac{3}{8}$ d) -242

e) 33 f) -11

2. a) $S_6 = -21, S_7 = 43$

b) $S_6 = 0, S_7 = 7$

c) $S_6 = 60\frac{2}{3}, S_7 = 60\frac{7}{9}$

3. Niech n – liczba stosów, a_n – liczba kartek w n -tym stosie, S_n – liczba wszystkich kartek.

$$S_n = 4 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 4(2^n - 1),$$

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

a) $4(2^n - 1) = 60$

$$2^n = 16$$

$$n = 4$$

$$a_4 = 32$$

b) $4(2^n - 1) = 1020$

$$2^n = 256$$

$$n = 8$$

$$a_8 = 512$$

c) $4(2^n - 1) = 4092$

$$2^n = 1024$$

$$n = 10$$

$$a_{10} = 2048$$

4.10. Procent składany

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r , wynosi po roku $k(1 + r)$.

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat na procent składany przy oprocentowaniu rocznym w wysokości r , po n latach wynosi $k(1 + r)^n$.

Ćwiczenie 1

Jaką kwotę będziemy dysponowali po n latach, jeżeli złożymy w banku 5000 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym r ?

- a) $n = 5, r = 4,5\%$ c) $n = 10, r = 3\%$
 b) $n = 8, r = 5,5\%$ d) $n = 10, r = 4\%$

Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej nagromadzone odsetki, to mówimy, że kapitał został złożony na procent składany.

Ćwiczenie 1

a) $5000 \cdot (1 + 0,045)^5 \approx 6230,91$ [zł]

b) $5000 \cdot (1 + 0,055)^8 \approx 7673,43$ [zł]

c) $5000 \cdot (1 + 0,03)^{10} \approx 6719,58$ [zł]

d) $5000 \cdot (1 + 0,04)^{10} \approx 7401,22$ [zł]

Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się **kapitalizacją odsetek** lub krótko **kapitalizacją**, a czas, po jakim ona następuje, nazywa się **okresem kapitalizacji**.

Przykład 2

Rodzice Basi złożyli w banku 5000 zł na trzy lata. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 6%, w ostatnich dwóch latach 5%, a kapitalizacja odsetek następowała co rok. Oblicz, jaką kwotę podejmą z banku po trzech latach, a jaką kwotę podjęliby po tym czasie, gdyby od naliczanych odsetek pobierano co roku podatek w wysokości 20%.

Oszczędności po trzech latach wyniosą: $5000 \cdot 1,06 \cdot (1,05)^2 = 5843,25$ [zł].
Gdyby odsetki pomniejszane były o 20%, to w pierwszym roku wyniosłyby:

$$0,06 \cdot 0,8 = 0,048 = 4,8\%$$

a w drugim i trzecim roku:

$$0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$$

Zatem po trzech latach mieliby: $5000 \cdot (1,048) \cdot (1,04)^2 \approx 5667,58$ [zł].

Uwaga. W Polsce podatek od odsetek wynosi 19%. W tym rozdziale, dla ułatwienia obliczeń, podatek ten pomijamy lub przyjmujemy, że wynosi 20%. Zwróć uwagę na to, że podatek dotyczy tylko dopisywanych odsetek, a nie zgromadzonego kapitału.

Ćwiczenie 2

Kapitał 5000 zł złożono w banku na dziesięć lat na lokatę o oprocentowaniu wynoszącym 5% i rocznej kapitalizacji odsetek. Oblicz wielkość dopisanych odsetek. Jak zmieniłaby się wielkość kapitału, gdyby od odsetek naliczany był podatek w wysokości 20% w skali roku?

Ćwiczenie 3

Kapitał w wysokości 800 zł złożono w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego czasu, jeśli kapitalizacja odsetek była roczna, a oprocentowanie:

- a) w pierwszych dwóch latach wynosiło 8%, w ostatnich trzech – 4%,
- b) w pierwszych trzech latach wynosiło 4%, w ostatnich dwóch – 8%,
- c) w pierwszych dwóch latach wynosiło 7%, w kolejnych dwóch – 5%, w ostatnim roku – 2%.

Oblicz wielkość kapitału końcowego, jeżeli od odsetek naliczano podatek w wysokości 20% w skali roku.

Ćwiczenie 3

- a) $800 \cdot 1,08^2 \cdot 1,04^3 \approx 1049,63$ [zł]
po opodatkowaniu: $800 \cdot (1,064)^2 \cdot (1,032)^3 \approx 995,43$ [zł]
- b) $800 \cdot 1,04^3 \cdot 1,08^2 \approx 1049,63$ [zł]
po opodatkowaniu: $800 \cdot (1,032)^3 \cdot (1,064)^2 \approx 995,43$ [zł]
- c) $800 \cdot 1,07^2 \cdot 1,05^2 \cdot 1,02 \approx 1030$ [zł]
po opodatkowaniu: $800 \cdot (1,056)^2 \cdot (1,04)^2 \cdot 1,016 \approx 980,34$ [zł]

Ćwiczenie 2

$$5000 \cdot (1 + 0,05)^{10} \approx \\ \approx 8144,47 \text{ [zł]}$$

odsetki:

$$8144,47 - 5000 = 3144,47 \text{ [zł]}$$

$$5000(1 + 0,05 \cdot 0,8)^{10} \approx \\ \approx 7401,22 \text{ [zł]}$$

różnica kapitału:

$$8144,47 - 7401,22 = \\ = 743,25 \text{ [zł]}$$

Odsetki mogą być dopisywane częściej niż co rok. Jeżeli dopisywane są co kwartał, mówimy o kapitalizacji kwartalnej, jeśli co miesiąc – o kapitalizacji miesięcznej.

TWIERDZENIE

Kapitał w wysokości k , złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym r i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wynosi:

$$k \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Przykład 3

W bankach A , B i C lokaty terminowe są oprocentowane 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane: co rok – w banku A , co kwartał – w banku B i co miesiąc – w banku C . Do każdego z tych banków wpłacono 1000 zł. W którym banku odsetki od tej kwoty po roku będą największe? O jaki procent wzrośnie kapitał w każdym z tych banków po roku?

Kapitał po roku wynosi:

w banku A : $1000 \cdot (1 + 0,06) = 1060$ [zł],

w banku B : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^4 = 1000 \cdot (1,015)^4 \approx 1000 \cdot 1,06136 = 1061,36$ [zł],

w banku C : $1000 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} = 1000 \cdot (1,005)^{12} \approx 1000 \cdot 1,06168 = 1061,68$ [zł].

Zatem odsetki dopisane w tych bankach to kolejno: 60 zł, 61,36 zł i 61,68 zł. Kapitał wzrośnie więc o: 6% w banku A , $\frac{61,36}{1000} = 0,06136 \approx 6,14\%$ w banku B i $\frac{61,68}{1000} = 0,06168 \approx 6,17\%$ w banku C .

Roczną stopę procentową r taką, że odsetki w wysokości $\frac{r}{m}$ kapitalizowane są m razy w roku, nazywa się **nominalną stopą procentową**. Rzeczywisty przyrost kapitału pokazuje **efektywna stopa procentowa** p , dla której odsetki kapitalizowane są raz, na koniec roku. Między tymi stopami zachodzi następująca zależność:

$$1 + p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

Ćwiczenie 5

Pani Katarzyna złożyła w banku kwotę 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 4% rocznie. Oblicz, do jakiej kwoty wzrośnie jej kapitał po pięciu latach, jeśli odsetki będą kapitalizowane co:

a) rok, b) pół roku, c) kwartał, d) miesiąc.

Ćwiczenie 6

Jurek zamierza kupić mikroskop za 738 zł. Na ten cel dostał od rodziców 400 zł. Pozostałe pieniądze mają pochodzić z lokaty terminowej założonej dwa lata temu. Czy Jurkowi wystarczy pieniędzy, jeżeli lokata wynosiła 300 zł i była oprocentowana 6% w skali roku przy miesięcznej kapitalizacji odsetek?

Ćwiczenie 7

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przykład

Rodzice założyli konto trzynastoletniej córce. Postanowili wpłacać na nie 200 zł na początku każdego roku przez pięć lat. Oprocentowanie roczne w całym tym okresie wynosi 5%, a kapitalizacja następuje co rok. Jakim kapitałem będzie dysponowała córka w wieku 18 lat?

Pierwsza wpłata w wysokości 200 zł będzie kapitalizowana pięć razy, druga – wpłacona rok później – cztery razy i każda kolejna wpłata będzie kapitalizowana o jeden raz mniej. Zatem kapitał po pięciu latach będzie wynosił:

$$\begin{aligned} & 200 \cdot 1,05^5 + 200 \cdot 1,05^4 + 200 \cdot 1,05^3 + 200 \cdot 1,05^2 + 200 \cdot 1,05 = \\ & = 200(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5) = \quad \text{korzystamy ze wzoru na} \\ & = 200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1-(1,05)^5}{1-1,05} \approx 1160,38 \text{ [zł]} \quad \text{sumę ciągu geometrycznego} \end{aligned}$$

Jakim kapitałem dysponowałaby córka z powyższego przykładu, gdyby okres oszczędzania był dłuższy o pięć lat?

Ćwiczenie 8

Jakim kapitałem będzie dysponował osiemnastolatek, jeżeli rodzice, począwszy od dnia jego urodzenia, wpłacali mu do banku każdego roku 300 zł? Stopa procentowa wynosiła 6% w skali roku, a odsetki były kapitalizowane co miesiąc.

Ćwiczenie 8

$$\frac{0,06}{12} = 0,005$$

$$\begin{aligned} & 300 \cdot (1,005)^{18 \cdot 12} + 300 \cdot (1,005)^{17 \cdot 12} + \dots + 300 \cdot (1,005)^{12} = \\ & = 300 \cdot [1,005^{12} + (1,005^{12})^2 + (1,005^{12})^3 + \dots + (1,005^{12})^{18}] = \\ & = 300 \cdot 1,005^{12} \cdot \frac{1-(1,005^{12})^{18}}{1-1,005^{12}} \approx 10001,43 \text{ [zł]} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

$$\text{a) } 10000 \cdot (1 + 0,04)^5 \approx 12166,53 \text{ [zł]}$$

$$\text{b) } 10000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{10} \approx 12189,94 \text{ [zł]}$$

$$\text{c) } 10000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{20} \approx 12201,90 \text{ [zł]}$$

$$\text{d) } 10000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{60} \approx 12209,97 \text{ [zł]}$$

Ćwiczenie 6

Jurek potrzebuje:

$$738 - 400 = 338 \text{ [zł]}.$$

Z lokaty otrzyma:

$$300 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{24} \approx 338,15 \text{ [zł]}.$$

Jurkowi wystarczy pieniędzy.

Ćwiczenie 7

$$\begin{aligned} & 200 \cdot 1,05 \cdot \frac{1-(1,05)^{10}}{1-1,05} \approx \\ & \approx 2641,36 \text{ [zł]} \end{aligned}$$



Odpowiedzi do zadań

1. a) 2205 zł
b) 2552,56 zł
c) 2687,83 zł
2. a) 754,76 zł
b) 754,76 zł
3. $r \approx 7,5\%$
4. po 5 latach około 1000 zł,
po 3 latach około 1082 zł
5. a) 3582,16 zł
b) 3586,85 zł
c) 3590,04 zł
d) 3591,60 zł
6. $13310 = 10000(1 + 0,1)^n$
 $1,1^n = 1,331$
 $n = 3$ lata
7. $7757 = k(1 + 0,05)^9$
 $k = 5000$ zł
 $5000 \cdot (1 + 0,05)^{18} \approx$
 ≈ 12033 [zł]
8. 25 000 zł

ZADANIA

1. Jaką kwotę będziemy dysponowali po n latach, jeżeli złożymy w banku na procent składany 2000 zł przy oprocentowaniu rocznym r ?
a) $n = 2, r = 5\%$ b) $n = 5, r = 5\%$ c) $n = 10, r = 3\%$
2. Kapitał w wysokości 600 zł został złożony w banku na pięć lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosi w pierwszym roku:
a) 6%, w drugim roku – 5,5%, a w trzech ostatnich latach – 4%,
b) 5,5%, w trzech kolejnych latach – 4%, a w ostatnim roku – 6%.
3. Oprocentowanie lokat w banku A wynosiło w kolejnych czterech latach: 9%, 8%, 7% i 6%. Stopa procentowa w banku B była w tym czasie stała i wynosiła r . Oblicz r , jeśli wpłacenie kapitału na cztery lata było w obu bankach równie opłacalne i oba banki kapitalizowały odsetki rocznie.
4. Jaką kwotę należy ulokować na koncie, aby po pięciu latach uzyskać 1217 zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 4%, a odsetki kapitalizowane są co rok? Jaką kwotę należałoby złożyć, aby uzyskać ten sam kapitał końcowy po trzech latach?
5. Do banku wpłacono 3000 zł na trzy lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Ile będzie wynosił kapitał po upływie tego okresu, jeśli odsetki są kapitalizowane:
a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc, d) codziennie?
6. Firma X zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 10 000 zł. Co roku bank nalicza odsetki w wysokości 10%. Kredyt wraz z odsetkami ma być spłacony jednorazowo po n latach. Na ile lat został zaciągnięty kredyt, jeżeli firma X będzie musiała spłacić 13 310 zł?
7. Dziadkowie w dniu narodzin wnuka zdeponowali dla niego w banku kwotę k zł na osiemnaście lat, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Obecnie wnuczek ma dziewięć lat i kwota ta wzrosła do 7757 zł. Ile wynosił kapitał początkowy k ? Jaką kwotę będzie dysponował wnuczek w osiemnaste urodziny?
8. Rodzice Kuby zamierzają kupić samochód, który kosztuje 40 000 zł. Zakup finansują ze środków własnych i zaciągniętego na ten cel kredytu. Kredyt wraz z odsetkami, które wyniosą 1200 zł, ma być spłacony po roku. Ile środków własnych mieli rodzice, jeżeli oprocentowanie kredytu wynosiło 8% w skali roku?